国家"八五"重点
图书规划项目

吴文俊 主编

北京师范大学出版社

ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI





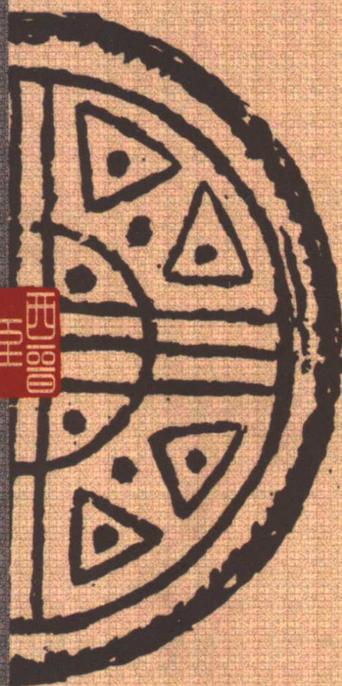
中国数学史大系

第四卷 西晋至五代

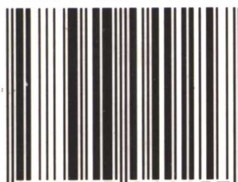
中国数学史大系

责任编辑 吕建生

封面设计 李葆芬







ISBN 7-303-04925-8/O·212
定价：45.00 元

国家“八五”重点图书规划项目

中国数学史大系

吴文俊 主编

本卷主编 沈康身

第四卷 西晋至五代

图书在版编目(CIP)数据

中国数学史大系　第4卷:西晋至五代/吴文俊主编;
沈康身分主编.-北京:北京师范大学出版社,1999
ISBN 7-303-04925-8

Ⅰ.中…　Ⅱ.①吴…　②沈…　Ⅲ.数学史-中国　Ⅳ.O112

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第34119号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街19号　邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京东晓印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:16.375　彩插:2页　字数:412千字
1999年8月第1版　1999年8月第1次印刷
印数:1～5 000　定价:45.00元

中国数学史大系编委会

本卷主编：沈康身

执 笔 人：（以姓氏笔画为序）

王荣彬　孔国平　纪志刚

沈康身　李　迪　何文炯

韩祥临

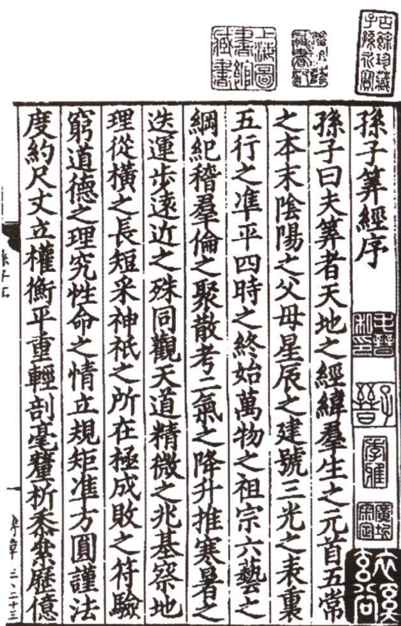


图版 1 U.Libbrecht(李倍始) 与沈康身合影

(1988 年 8 月桥本敬造摄于美国 San Diego)



图版 2 祖冲之造像
(429 ~ 500)



孫子筭經序

孫子曰夫筭者天地之經緯羣生之元首五常之本末陰陽之父母星辰之建號三光之表裏五行之準平四時之終始萬物之祖宗六藝之綱紀稽羣倫之聚散考二氣之降升推寒暑之迭運步遠近之殊同觀天道精微之兆基察地理從横之長短采神祇之所在極成敗之符驗窮道德之理究性命之情立規矩準方圓謹法度約尺丈立權衡平重輕剖毫釐析黍絫歷億

图版 3 《孙子算经》序书影



图版 4 僧一行造像
(673 ~ 727)



图版 5 敦煌 A428 窟藻井



图版 6 敦煌 A407 窟藻井



图版 7 敦煌 A329 窟藻井



图版 8 敦煌 A444 窟圆光

序

1984年间，四位中国数学史的专家教授，倡议缮写一部全面论述中国传统数学历史发展的巨大著作，取名为《中国数学史大系》，这四位教授（以年事为序）是：

北京师范大学的白尚恕教授；

杭州大学的沈康身教授；

内蒙古师范大学的李迪教授；

西北大学的李继闵教授。

中国传统数学源远流长，有其自身特有的思想体系与发展途径，从远古以至宋元，在很长一段时间内成为世界数学发展的主流，但自明代以来，由于政治社会等种种原因，特别如明末徐光启所指出的那样，一方面“名理之儒，土苴天下之实事”，另方面“妖妄之术，谬言数有神理”，致使中国传统数学濒于灭绝，以后全为西方欧几里得传统所凌替以至垄断，虽然康乾之世曾有一度重视，但仅止于发掘阐释古籍而已，循至20世纪中叶，李俨、钱宝琮先生撰写中国数学史专门著作进行介绍，使中国古算得以不绝如缕。到70年代特别是改革开放以来，全国兴起了研习中国传统数学的高潮，论著迭出，仅就对《九章算术》与注者刘徽的各种形式的专著，就在10种以上，其它方面论著之多，更难以统计，这些研究使中国传统数学的固有特色，如构造性、机械化、以及离散型的算法形式

等，与西方欧几里得传统迥然异趣，得以贻然在目，甚至国外数学史家，也表示了对中国古算的浓厚兴趣，李约瑟的中国科技史巨著固不待论，此外还酝酿了《九章算术》与刘徽注的英文与法文编译，尤其值得一提的是：《九章算术》刘徽注中关于阳马术的一段术文，过去认为有脱漏舛误而难以理解。丹麦的 Wagner 先生却给予了正确的解释，使中国古算中一段辉煌成就，得以大白于世。虽然如此，目前国内大部分群众对中国数学的成就和发展情况了解仍嫌不足，已有的同类书籍却偏于某一侧面，不能满足现在教学、科研或其他方面的需求。已有的工作与我国的发展形势还不太相称，国际学术界也有较强烈的要求，希望有大型的中国数学史著作问世。《大系》的倡议，可谓来自这些对客观形势的分析，有鉴于客观上有此必要而来。《大系》全书是编年史，自上古以迄清末，共分八卷，各卷自成断代史，除复原古代算法的形式，并对照以近代算法外，将尽量收入各家最新研究成果，以期能对中国古代数学的发展情况与辉煌成就作一次较彻底的清理与研究，借以达到发扬成绩，总结规律，预见未来并服务于我国四化建设的目的。

《大系》在白、沈与二李等四位倡议与领导之下，有不少中算史的专家学者参与了写作，规模之宏，在国内外还从未见过，可谓首创。不幸的是：在写作过程中，李继闵教授于 1993 年因病逝世，白尚恕教授也于 1995 年因肺癌逝世。这影响了编写进程，使《大系》的写作不得不一再延期，原来的计划也作了某些局部修改，所幸赖写作者的积

极工作，以及北师大出版社的高度热情，第一部分一、二、三卷自上古以迄以刘徽为中心的三国时代，终于问世。在《大系》全书不久即可全部出齐之际，聊志数语，以示庆贺。

吴文俊

1997.12.25

第四卷前言

本卷讲述中国传统数学的继续发展和再发展。本卷复盖面：在历史上，从西晋、东晋、南北朝迄隋、唐、五代；地域上，从中原到辽阔的边疆。《算经十书》除《周髀》、《九章》而外，都是在这个时期陆续完成的。知名数学家孙子、祖冲之、王孝通、张遂都孕育于这个时期。因此本卷所论时期在中国数学史上的重要性是不言而喻的。

本卷分八编。分工合作，最后由本卷主编统稿。其中执笔人为：

第一、二编　韩祥临

第三编　何文炯

第四编　第一章　纪志纲

　　　　第二章　李　迪

　　　　第三章　孔国平

第五编　第一、二章　王荣彬

　　　　第三章　韩祥临

第六编　李　迪

第七、八编　沈康身

由于执笔同事们分散南北各地，在书写风格上难免有不一致的地方。其中如有疏漏之处，敬请同志们批评指正。

在本卷编写过程中，我们得到中国科学院吴文俊院士的热心指导和北京师范大学出版社同志们的大力支持，对此，我们表示

由衷的感谢!

沈　康　身
1999 年 3 月 21 日
于浙江大学

目　录

第 一 编

总 论

第一章 历史总结

第一节 概 述[①]

公元265年，司马炎代魏称帝，建立晋朝。公元280年灭吴，统一全国，史家把这个统一的晋朝叫作西晋(265～317)；永嘉之乱后，司马睿在南方建立政权，建都建康(今南京)，史称东晋(317～420)。

经过三国长期混战以后，晋朝的社会经济基础十分薄弱。晋武帝便采取了一些措施，如安抚流亡、减免徭役、规定男女及时婚配，使国家户籍上的户口很快增长。塞外的少数民族，如匈奴、鲜卑、羯、氐、羌等，大量内迁。这些都体现了当时社会的安定。晋武帝死后不久，西晋便处于南北分裂状态。各民族部落间的混战及北方糜乱的惨局，使人民大量死伤和流亡，生产受到空前的破坏，西晋的统治机构也从此瘫痪。司马氏政权的腐败，又激化了阶级矛盾和民族矛盾，各民族人民纷纷起义，西晋政权很快瓦解。

① 白寿彝主编．中国通史纲要．上海：上海人民出版社，1980

司马睿在南方建立政权以后，东晋偏安江南。这时的北方进入了“五胡十六国”时期，其间战火长年不断，给人民的生命财产和社会生产造成了很大损失。农民和小地主纷纷破产，成为大地主的佃户，加上繁重的苛杂徭役，民不聊生，苦不堪言，相继流亡江南。当时江南相对稳定，北方的士大夫和难民来到这里，带来了北方的先进生产技术和较高的文化知识。东晋政权又采取了一些发展生产和安置流民的措施，这就促使江南的社会经济一时趋向繁荣。

两晋十六国时期，佛教和玄学都有发展。西晋时，佛教依附玄学，还不能独立发展，到了东晋，由于战乱不断，生灵涂炭，佛教宣扬因果报应、轮回转世的教义，很受社会各阶层的欢迎，因而其社会影响超过了玄学，尤其是在战乱不已的地方。但这时玄学也有所发展。裴頠的《崇有论》指出地主阶级如果忽视了封建道德规范，就不能进行统治。郭象作《庄子注》，主张不同的阶级都要“各安其所安”。

文学方面，西晋陆机的《文赋》，对我国文学理论有很大的发展；左思的《三都赋》，一时造成“洛阳纸贵”；东晋陶渊明的《桃花源记》，在当时战乱的情况下，表达了对一个没有争夺、欺诈的和平社会的向往。艺术方面，王羲之的书法，顾恺之的绘画，都开辟了艺术的新境界，对后世有深远的影响。至于历史著作，有陈寿的《三国志》、司马彪的《续汉书》和袁宏的《后汉纪》等。

总的来说，两晋十六国时期，是中国历史上的混乱时期，但它为全国的又一次统一准备了条件。在科技文化上也有它的贡献。

公元 420 年，刘裕灭东晋建立(刘)宋，宋及其后的齐、梁、陈称为南朝。在(刘)宋初建时，北方尚处于多个政权割据的状态，至公元 439 年，魏太武帝灭北凉后，才最后结束了北方割据，统一了北方。北魏及其后的东魏、西魏、北齐、北周称为北朝。南北朝时期(420～589)，总的来说，南方较北方安定，但南方的劳动

人民也遭受着残酷的剥削，农民起义连续不断。

北魏时，自太武帝被杀后，各种矛盾显著扩大。公元471年，孝文帝即位，在整饬纪纲、严明赏罚、改革吏治的同时，推行“三长制”和“均田制”，促进了农业生产的恢复和发展，形成了北方从政治、军事、人力等各方面压倒南方的局面。与这种社会状况相适应，科学技术也得到了发展。

公元578年，北周武帝死后，政权落在外戚杨坚手中。公元581年，杨坚称帝，建立隋朝，嗣后，结束了南北对立，再次统一了中国。

南北朝时期，是我国历史上民族大融合的重要时期。生活在西部边陲的许多民族相继内迁，东南和西南民族与内地的往来也较以前频繁，密切了汉族与各少数民族的关系。各兄弟民族在与内地的密切联系中，不但加强了经济往来，而且十分重视科学技术的交流，因而提高了整个中华民族的科技水平。

为了缓和矛盾，统治阶级这时采取了一些较开明的政策。玄学、佛学盛行，唯心主义发展到一个新的阶段，唯物主义思想也在与唯心主义思想的斗争中得到了发展。士人的思想空前活跃，造成了学术上的繁荣。

在文学和史学方面，南朝较北朝为盛。南朝的文学以诗歌最著，沈约等提倡四声对仗，对后世影响很大。梁昭明太子肖统选录的《文选》是先秦以来精采的文章总集。刘勰撰的《文心雕龙》，对文学的内容和形式、文学发展与时代的关系，都有独到的见解。对后来较有影响的历史著作有刘宋范晔的《后汉书》、梁朝沈约的《宋书》、萧子显的《南齐书》和北齐魏收的《魏书》。尤其是范晔的《后汉书》，资料丰富，文笔清新，在史事的论断上有独到的见解，是《汉书》、《三国志》以后成就最大的历史著作。这一时期，史学著作有很多种，可惜流传下来的很少。

隋朝是一个短暂的皇朝，只二帝。杨坚于公元581年灭周后

在位 23 年，他为太子杨广所害。隋炀帝杨广在位只 13 年。杨坚在政治上进行了改革，平定了江南的叛乱，使隋初的政局得到了稳定，社会经济很快发展起来。隋初十几年粮食经常丰收，手工业和商业也有了较大发展。

隋朝很关心跟边疆各族的关系。这时期，台湾跟大陆的关系更加密切了。住在东北辽河流域和黑龙江、额尔古纳河一带的契丹、室韦、靺鞨，住在阿尔泰山以南的突厥，住在祁连山以南、雪山以北的吐谷浑，以及高昌、龟兹、焉耆、于阗等，都跟隋朝有来往，经常派人到内地来交换土产。隋朝还以宗室女子分别嫁给突厥的可汗、吐谷浑的首领和高昌王，并派裴矩进驻张掖（今甘肃省），主持跟西部边疆的联系和商业交通等事宜。

隋朝有两大工程载入史册，一是营建东都洛阳，二是开通大运河。尤其是大运河，以洛阳为中心，北通涿郡，南达余杭，全长五千余里。大运河的开通为维护国家统一、繁荣经济起了很大的作用。但是，这两项工程耗费了大量人力、物力，劳动人民不胜徭役负担。加上几次进攻高丽，更加剧了国内的阶级矛盾，致使农民纷纷起义，终于造成李渊起兵太原，自立为帝，改国号为唐。

唐高祖李渊称帝后，公元 623 年再一次统一了中国。公元 626 年，李渊传位给次子李世民，李世民就是历史上有名的唐太宗，是中国历代皇帝中少有的政治家、军事家。他鼓励臣民对政治问题提出不同的意见，以便在具体施行时能取得较好的效果。这种作风，提高了他的政治威望，加强了朝廷的团结。李世民改进并发展了隋朝的各种制度，唐时的《唐律疏议》是中国历史上最完整的封建法典，对后来的封建法典有很大影响。

李世民死后，唐高宗李治即位（649 年）。皇后武则天是个很有才能和政治野心的人。她于公元 655 年开始参政，660 年就掌握了全部大权。公元 690 至 704 年还一度改国号为周，自称皇帝。由

于武则天掌权，李唐的皇权一度受到很大损害，但李世民开创的政治局面并未终止，社会经济继续发展。

公元712年，唐玄宗李隆基即位，唐朝的社会经济发展到了繁荣富强的顶峰。他改变了一些弊政，擢用了有能力的人出任宰相，对臣下的忠谏也能听取。因此，他在位的三十多年间，海内富裕，国力充实，人丁兴旺，呈现了中国封建社会前所未有的盛世，世称“开元之治”。但自改元“天宝”以后，唐玄宗丧失了政治警惕，陶醉于已有的成就，朝政便进入了一个紊乱期。朝臣与割据势力间的斗争，民族间的不和是这一时期的特征。“天宝之乱”使人民的生命财产和社会经济遭受了很大的破坏。

公元820年以后，是唐皇朝的没落时期。在这87年中，宦官把持朝廷大权，朝臣结党营私，朝臣与宦官之间有勾结，又有斗争。地方上则藩镇割据，藩镇之间又不断斗争。各地大规模的农民起义纷纷而起，宦官势力和藩镇势力有新的膨胀，皇朝名存实亡。公元904年，朱温派人杀唐昭宗李晔，立李柷为帝(哀帝)。公元907年，朱温废李柷，自立为帝，国号为(后)梁。当时虽还有李克用和其它几个藩镇存在，但历史已进入了五代十国时期。

唐朝在民族关系上，有战争，但更多的是和好。唐朝进一步密切了和各少数民族的关系，如与突厥、回纥、南诏、吐蕃及东北各族的关系；李世民还把文成公主嫁给吐蕃(今西藏)赞普松赞干布，唐中宗又把金城公主嫁给赞普弃隶缩赞，这些都加强了相互间的经济和科技文化交流。

在对外关系上，唐代盛世跟许多国家和地区发展了广泛的联系，包括今朝鲜、日本、巴基斯坦、阿富汗、伊朗等。其中日本和中国的联系尤为紧密。

国内民族关系的密切和对外联系的广泛，使唐都长安不只是全国的大都会，而且成了世界性的大都会，国内少数民族的成员和国外的政治使者、宗教人物及商人，都大量跑到长安来，有的

还在长安娶妻生子，定居下来。他们带来了各地的物产、音乐、舞蹈、杂技、风俗和宗教，以致“长安中少年有胡心”。直到晚唐，汉族与各少数民族的关系，才不断破裂，战争时有发生，国势也日益衰落。

在文化方面，唐代的诗、文、史学和宗教都有所发展。王勃、骆宾王等开始摆脱了齐梁的诗风，在题材上开拓了新的领域，在形式上探索了音韵格律，为唐诗的独特风格开辟了道路。此后唐诗的创作进入了繁荣的阶段，出现了李白、杜甫、白居易这样伟大的诗人。文体的改革，经韩愈、柳宗元的倡导，也有了很大的成就。书法家颜真卿的正楷，开创了新的风格，后人称“颜体”为书法正宗。

史学上，主要是纪传体史书编纂方面的成就。《梁书》、《陈书》、《北齐书》、《周书》、《隋书》、《晋书》(重修)等都是这一时期的纪传体史书。此外，李延寿又综合南朝宋、齐、梁、陈的历史，著成《南史》；综合北朝的魏、齐、周的历史，著成《北史》。这样三国以后各朝的纪传体史书都完备了。公元710年，刘知几又著《史通》二十卷，成为中国历史上第一部史学评论专著。杜佑经历三十多年，写成了《通典》，他以通史的形式，论述了各个时期的经济、区域等各方面的发展，是中国史学上的创举。

晚唐时期，随着国势的日益衰弱，文化也大不如前，只有诗坛上，犹如日落前的夕照余晖，还有几个诗人在忧时悯乱，感叹身世，为唐朝的衰落唱着挽歌，如杜牧、李商隐等。在唐诗走向衰落的时候，以言情为主的词却逐渐兴起，如温庭筠、韦庄等，他们除了在写词的技巧上为后人起了一些开拓作用外，别的无可称道。

这时，外来的祆教(Zoroastrianism)、摩尼教(Manicheism)、景教和伊斯兰教在国内流传，前三者从波斯传入，后者从阿拉伯传入。自公元651年以来，长安、洛阳、扬州、广州等地，都有不

少来自阿拉伯、波斯的穆斯林在活动。

相比之下，佛教更为兴盛，出现了不少著名的僧人。唐统治者为巩固自己的政权，在前朝基础上兴建了不少的塔、寺，开凿了许多石窟。这些佛教建筑和石窟，总是跟雕塑和绘画联系在一起的，从而又促进了唐代艺术的发展。

唐皇朝也很推崇道教。被称为道教教祖的李耳因和唐朝皇室同姓，所以道教特别受到优待。唐高宗追尊老子为太上玄元皇帝。唐玄宗令各地修建玄元皇帝庙，并把《老子》、《庄子》等书列为科举考试的项目，还请道士炼丹，求长生不老之药。在浓厚的宗教气氛中，以傅奕、吕才为代表，提出了反宗教反迷信的唯物主义观点，针锋相对地批判了宗教迷信的荒谬。这在当时是十分可贵的。

五代，包含在中原建立的后梁、后唐、后晋、后汉、后周五个朝代，共十三帝，五十三年，相当于公元907年至960年。五代十国变换的频繁，反映了当时政局的混乱。五代的开国之君，都是以前朝藩镇的身份夺取帝位。在每个朝代的内部，政权的争夺也很尖锐。战争、横征暴敛、严刑峻法的灾难，破坏了中原地区的社会经济，不断激发了农民起义。

相反，在南方的几个小国，像前蜀、后蜀、吴越、南唐、南汉等国，社会比较安定，经济得到了持续的发展。不少中原人来到这些地方逃避战乱，他们带来了一些生产技术，也带来了学术文化。

五代晚期，后周的郭威在政治上，经济上进行了改革，逐步恢复了中原经济，为后来北宋在一定规模内的统一提供了有利条件。

总的来说，五代时期的历史是唐末藩镇割据的继续，也是藩镇割据的转变。在社会经济上，它开始了经济重心向南方的转移。

第二节 科技成就[①]

西晋至五代，中国几度分裂，又几度统一。一方面，战争对社会生产造成了极大的破坏，也使科学研究和科技文化典籍蒙受损失。另一方面，在战争的间歇及社会稳定的时期，科学技术与社会生产相互促进，共同得到发展。这一时期，玄学、道教、佛教盛行；唯物主义思想得到了进一步发展；士人的思想空前活跃，加上统治者有时也采取较开明的政策，这就为科学技术的发展开拓了一片自由天地，并使科学技术出现了某种非实用的趋势。

民族的大融合加强了各民族之间的经济往来和科学技术的交流，提供了相互学习的机会，也提高了整个民族的科学技术水平。

从深度和广度上看，我国的科学技术经两晋南北朝的发展，在隋唐时期已经达到了相当成熟的阶段。这一时期，科学的教育和普及，生产技术的定型和推广，生产规模的逐步扩大，在社会、政治、经济、思想、文化等方面都产生了巨大的影响，使我国在世界文明史上写下了光辉的一页，并为宋、元时期科学技术发展的高峰提供了良好的条件。

一 农业生产技术

农业是人们生活的支柱，农业生产技术的提高是关系到国计民生的大事，历代君王都十分重视农业的发展。

(一)贾思勰的《齐民要术》

两晋至南北朝时期，我国农业科学技术水平的主要标志是贾思勰(5 世纪末至 6 世纪中叶)的农学名著《齐民要术》。该书系统地总结了前代农学的成就，为后来农学奠定了基础，在国外也备

---

① 杜石然，等编著．中国科学技术史(上册)．北京：科学出版社，1982

受赞誉。

在《齐民要术》中，贾思勰着意评述了如何合理利用人力、物力及搞好经营管理的重要性。他把天时、地利、人力有机地结合起来，又强调因时制宜、因地制宜、精耕细作、合理经营的农业科学技术思想，在我国古代农业生产中有着深刻的影响。

该书反映了北魏时期，我国北方农业及农业科学技术的水平。书中所述的保墒技术比汉代有了进一步发展，形成了耕—耙—耱一整套保墒防旱的措施。贾思勰根据北方冬季寒冷，不宜农作物生长，只能春夏种植等情况，首先提出了“秋耕欲深，春夏耕欲浅”的理论，这是科学的总结。

《齐民要术》强调指出，种子优劣、播种时间迟早，及病虫害的防治与作物的产量、品质有密切的关系。它记载了很多作物品种及其自身的特点。该书对种子的选择、收藏和种前的处理非常重视，具体记述了水选、溲种(即淘种)、晒种等种子的处理方法，并最早记录了我国水稻的催芽技术。这反映了当时我国对种子处理的丰富经验。

从《齐民要术》中，我们可以看出，当时我国已经熟练地掌握了合理施肥、换茬、轮作和复种等保持和提高土地肥力，以地养地的技术。

《齐民要术》还反映了我国古代丰富的生物学知识。当时人们已经用上了插接法——无性繁殖的嫁接法。在嫁接时已注意到了接枝要选择向阳的枝条，说明对阳光在植物生长中的作用已有所认识。它还强调嫁接时木质部和木质部、韧皮部与韧皮部要密切接合，说明对植物生长特点已有较深的了解。另外，对发酵技术和兽医药学也有明确的记载。

《齐民要术》对黄河中下游地区水稻的栽培技术作了详细记载，由此也反映出当时南方的水稻种植的技术已达到了相当高的水平。书中还可以看到当时南方在蚕桑生产技术上的新成就。此

时，南方蚕农发明了人工低温催青制取蚕种的方法，利用低温抑制蚕卵，使它延期孵化。这样，一批蚕在同一年里能养出多批蚕来，这是养蚕技术上一项重要的创造。

(二)隋唐五代时期农业生产技术的提高

国家统一，社会安定，对农业生产的发展具有积极的作用。隋唐初期实行的土地政策及减轻徭役等措施，也在客观上为农业生产的兴盛创造了一定的社会条件。隋朝建立后20年间，就已“库藏皆满”。唐建立20年后，隋朝所留库藏尚未用尽。唐代，农业生产继续发展，到开元“盛世”时，“人家粮储，皆及数岁”。天宝八年(749年)国库仓储粮食约达一万万石。足见当时农业生产的盛况和防潮、防腐技术的高超。

1. 南方水田整地技术

这一时期，由于南方社会安定，经济得到迅速发展，劳动力大量增加。农业生产技术的进步和大规模兴修水利，使得南方农业生产水平大幅度提高，这首先表现在整地技术方面。

耕地的主要工具——犁的结构，发展到唐代已相当完备。陆龟蒙《耒耜经》中，记唐后期的江东犁由11个部件构成，耕地时，欲深欲浅均可，运用自如。江东犁的出现是我国耕地用的铁农具已经成熟定型的重要标志。

除犁外，还有一种新的整地工具铁锴也在这时出现。用它掘土，比牛耕还深，且可随手耙碎土块，很适合于缺牛少耙的小农使用。《耒耜经》还提到碎土块平整地面的工具爬(耙)和砺礋。这是南方水稻生产精耕细作的又一标志，它对水稻生产的发展起了促进作用。

2. 农田水利和灌溉工具

自东汉以后，农田水利工程已开始由北方向南方推进，至隋唐时期自北至南都大兴水利，达到了全面发展。据粗略统计，仅唐代兴修的水利工程就达二百六七十处，如黄河、汾河河曲地带

的水利开发、龙门下引黄灌田工程、江浙海塘、太湖湖堤、长江堤防等都在这一时期相继完成。至五代时，江南的吴越国在唐代修建的基础上又大加兴修。此时在太湖地区开始出现圩田制度和水利系统。据北宋水利学家郏亶《吴门水利书》及其它历史资料记载，当时的太湖圩田有着相当周密的规划和科学的布置，整个圩田形成了圩堤、河渠、堰闸三者相结合的有机体。尤其是浦塘圩田系统的建成，使太湖低洼地区逐步变成“苏湖熟，天下足”的全国最重要的粮仓之一。

与此同时，唐朝还加强了对农田水利的管理。唐尚书省工部下，设有水部郎中员外郎，“掌天下川渎陂池之政令”，又设有都水监，由都水使者掌管京畿地区的河渠修理和灌溉事宜。唐朝还制定了关于水利的法律《水部式》，规定了有关河渠、灌溉、舟楫、桥梁以及水运等法令。唐代灌溉技术比以前大有进步，特别是水车得到推广，北方有“以木桶相连，汲于井中”的水车，长江流域出现了半机械化的筒车。

3. 茶树栽培与茶叶加工

我国是茶树的原产地之一，也是世界上发现茶树和应用茶叶的最早国家之一。唐代茶树的种植已遍及五十多个州郡，还出现了官营的茶园。名茶品种多达二十多种，茶叶的生产和加工成为农业和农产品加工的一个重要部门。世界上第一部关于茶的专著《茶经》，就在唐代完成。这时期，人们已经掌握了茶树栽培的季节、密度、中耕、施肥、排水、灌溉、遮荫等技术措施。

茶叶早在5世纪开始就输入亚洲的一些国家。公元9世纪初茶树传入日本，其后逐渐遍及五大洲。

二　地　理　学

西晋至南北朝时期出现了许多地理著作，撰述各州郡山川的情况。尤其以描述长江流域和长江以南各州、郡的为多，反映了

南方经济、文化的发展。“地记”包括各地的历史和地理情况，有谯周的《三巴记》，顾启期的《娄地记》，庚仲雍的《湘州记》，李叔布的《齐州记》等。记山的著作多以描述寺观为主，地理学上价值不大。“水道记”记载了水道的来龙去脉，反映了一定历史时期的自然风貌，科学价值较高，如郦道元的《水经注》。此外，这一时期还有一些地方性或全国性的地记著作，如晋初挚虞的《畿服经》，南齐陆澄的《地理书》，梁朝任昉的《地记》等。可惜这些著作今已散佚殆尽。

隋唐之际，统治者十分重视地理著作的编纂。这时期编修的地理著作是以“图经”的形式出现，即由地图和文字说明两部分组成。文字说明部分包括的内容比地图更为广泛，是对《汉书·地理志》为代表的传统地理学的丰富和发展。隋炀帝执政时，曾命尚书省汇成《区宇图志》，该书“叙山川，卷首有山水图；叙郡国，卷首有郭邑图；叙城隍，则卷首有公馆图”。唐代的全国性、地区性和关于边疆及外国的地理著作更是大量出现，地图的著作亦有不少问世。如贾耽、李吉甫、玄奘的著作都十分著名。对潮汐的认识以及大运河的开凿，则反映了当时人们关于地理学知识的新成就。

(一)裴秀的制图六体

由于已有的地图不能满足当时所谓“大晋龙兴”的政治和军事的需要，裴秀(224～271)编成《禹贡地域图》18 篇。他以 1∶1 800 000 的比例，将地图缩成方丈图，为军政管理提供了科学依据。这可以说是见于文字记载的最早的历史地图集。

裴秀在地图学上的贡献还在于他把前人的制图经验加以总结提高，第一次明确地建立了我国古代地图的绘制理论。在《禹贡地域图》序中，裴秀明确地提出了六条制图原则，即分率、准望、道里、高下、方邪、迂直。分率是说明必须有按比例反映地区长宽大小的比例尺；准望是确定各地间彼此的方位关系；道里是要

知道各地间的路程距离；后三条是说明制图时各地间所取的距离应是水平直线距离，故逢高取下，逢方取斜，逢迂取直。裴秀对数学在制图中的运用非常重视，把数学中的比例运算方法与测定远方地物间水平距离的“重差术”应用于地图的绘制中。他提出的这些制图原则是绘制平面地图的基本科学理论，对后世影响很大。

（二）郦道元的《水经注》

《水经注》的内容十分丰富，作者郦道元(？～527)以大量的事实详注《水经》。书中以河道水系为纲，详细地记录了河流经过地区的地形、沿革、物产、人文等方面的情况。尤其对于河流分布、渠堰灌溉以及城市位置的记述最为详细，而且具有清晰的方向、道里等方位和数量的概念。该书反映了当时的地理面貌，对现代经济建设也有一定的参考价值。另外，《水经注》所涉及的周边邻国的地理记载，至今仍是研究这些国家和地区的宝贵资料。

（三）贾耽及其贡献

贾耽(730～805)，唐河北沧州人，曾任宰相，一生好读书，对地理尤为熟悉。他坚持了30年的学习和调查，绘出不少地图，写成了许多地理著作，最重要的有《海内华夷图》和《古今郡国县道四夷述》。前者是我国历史上著名的地图，图的画法师承裴秀的制图“六体”。图中以黑色书写古时地名，以红色书写当时地名，使“今古殊文，执习简易”，这是制图史上的一项创新，为后世的历史沿革地图所沿用。

（四）李吉甫和《元和郡县图志》

李吉甫(758～814)，赵郡(今河北赵县)人，曾任唐朝宰相。他晚年著有《元和郡县图志》54卷，记述了当时全国10道所属州县的沿革、道路、山川、户口、贡赋和古迹等。篇首有附图，图于南宋佚亡，故后来改名为《元和郡县志》。该书是现存魏晋以来所著全国性最早的地理书，它继承和发扬了《汉书·地理志》的传

统地理学体系，并对后世全国地理志的编纂影响很大。

（五）玄奘和《大唐西域记》

玄奘(602～664)，俗名陈祎，洛州缑氏(今河南偃师缑氏镇)人，著名的佛教学者和旅行家。他于贞观三年(629年)离开长安，西行取经，历经艰险，跋涉五万多里，足迹遍及中亚和南亚当时的110个国家和地区，于公元645年回到长安。由他口述，辩机笔录，第二年便完成了关于我国西部边疆地区和中亚、南亚的重要地理著作《大唐西域记》。书中以文雅生动的笔法，记述了他亲自经历的110个地区和国家，以及传闻中的28个国家的地理位置、历史沿革、风土人情、山川、物产、气候及宗教等情况。这对地理知识的传播和发展，对促进当时的中外交通，都作出了重大贡献。

（六）对潮汐的认识

随着天文学和航海业的发展，唐代对潮汐的认识也达到了一个新水平，出现了窦叔蒙论海潮的专门著作《海涛志》。该书共6章，成书于8世纪中叶，是我国现存最早的潮汐专著。书中对潮汐变化与月球运动之间存在的客观规律作了深刻的描述。窦叔蒙通过精密的计算，得出一个潮汐循环所推迟的时间为50分28.04秒，这个数据与现在计算正规半日潮每日推迟50分钟极为相近。窦叔蒙还创立了科学的图表表示法，从图中可一目了然地看出潮汐“循环周始”的变化规律。《海涛志》反映了8世纪中叶，我国对潮汐的成因和变化规律，不仅有科学的定性认识，而且对来潮时间也有较精确的定量认识。

（七）大运河的开凿与利用

为加强对南方的政治、军事控制，并漕运南方的粟米丝帛，以满足中央政权机构的需要，隋统治者发起了运河的大规模开凿。自公元584年开始，至公元610年结束，动用了数百万民工，沟通了海河、黄河、淮河、长江和钱塘江五大水系。大运河全长五千

余里，是世界水利史上的伟大工程之一。以现代的眼光看，这样巨大的工程，又穿越复杂的地理环境，从设计、施工到管理，要涉及到测量、计算、机械、流体力学等多方面的科学知识，要解决一系列科学技术上的难题。这一工程的完成，反映了我国古代劳动人民的聪明智慧和创造精神。

大运河成了我国各封建王朝南北交通的大动脉，它对加强我国南北间的联系和交流，促进祖国的统一和发展，都起了重要作用。运河两岸的扬州、杭州、镇江等成为物资和文人荟萃的繁荣城市。

三　医　药　学

这一时期，医药学倍受重视。在两汉的基础上，我国传统的医药学此时进入了一个广泛总结整理的阶段，出现了大量医学著作。特别是对脉学、针灸学、本草学和药物炮制加工技术以及方剂学进行了总结，使我国传统的医学体系更加丰富和发展。医政制度则沿袭了两汉。南北朝时期增设了太医丞、藏药丞、侍御师、太医博士、太医助教、尚药监等官员。至隋唐时期，医药机构已较完善，其规模不但为中国历代所无，也是当时世界所罕见的。当时的医药机构是由门下省统辖尚药局，负责宫廷中的医药事务，由太常寺统辖太医署，掌管政府中的医政事务。隋时太医署有二百多人。唐时有三百多人，人员分工比隋时更为精细，有令、丞、监、正等主管官员，还有主药、医师、药园师、典药、针工、按摩工等。

刘宋时，官方开始创办医学教育，至唐时教育制度已相当完善，除了传统的个人之间的传授外，国家也采取措施，在太医署设医学，分医科、针科、按摩科和咒禁科；招收学生，置博士和助教进行教授。各科又有许多不同的专业，建立了严格的考核制度和升留制度。另外各州也设有医学，教授学生。

唐代还在陵寝庙宇等处储存药物，以备救护。还建立了养病坊，收治病人。同时，制定了严厉的医药律令，惩处医疗事故和欺诈现象。

（一）王叔和与《脉经》

利用切脉诊断疾病，是中医诊断学的一种独特方法。但脉学知识一直比较零散，至晋代，名医王叔和对历史上的脉学知识进行了系统的整理和总结，著成《脉经》一书，成为我国现存最早的脉学专著。书中列举的24种脉象，基本上都符合现代血液循环系统特性的认识；对每一种脉象及声色、征候，王叔和都作了简明扼要的叙述。它奠定了中医脉学诊断的基础。

（二）皇甫谧和《针灸甲乙经》

针灸是中医学中又一独特的治疗技术，西晋皇甫谧作了系统总结。皇甫谧在身患严重的风痹症时，仍以顽强的毅力，致力研读针灸书籍，根据《黄帝内经》的《素问》、《针经》和《明堂孔穴针灸治要》三部著作，以及其它书籍，结合个人心得著成《针灸甲乙经》，也称《黄帝甲乙经》，简称《甲乙经》。全书共10卷分128篇，内容论针灸及脏腑、经络、腧穴、病机、诊断、治疗等，定人身腧穴总数654个，对各穴的具体位置及主治征候，皆有明确叙述。它统一了西晋以前经穴纷乱的现象，是我国现存最早的针灸学专著，也是针灸学的经典著作。

（三）陶弘景和《神农本草经集注》

陶弘景(456～536)，一生对阴阳五行、风角星算、山川地理、方图产物和医术本草都深有研究。他发现自《神农本草经》问世以后，几经传抄和药物增补，在药物的性能和分类方面很混乱，错误也很多，于是重新进行整理，著成《神农本草经集注》7卷，共记载了药物730种。该书虽已散佚，但从敦煌石窟的残卷和后代著作所摘引的内容看，此书具有很高的学术水平。陶弘景在《集注》中改变了《神农本草》以上、中、下三品进行分类的方法，创

立了新的药物分类法。主要是以药物的自然来源和属性来分类，它把药物分为玉石、草木、虫兽、米食、果、菜、有名未用等七大类。后来唐朝的《新修本草》和明朝李时珍的《本草纲目》的分类法，都是在这基础上发展起来的。另外“诸病通用药”是以病症之纲，根据药物的治疗功效，把药物纳入不同的病症项下，有利于临床的治疗和医药的普及推广。

（四）葛洪和《肘后方》

葛洪(约281～341)是我国著名的医药学家和炼丹家。他在阅览医学典籍时，深感以往医药方“混杂烦重，有求难得”，对于大多数人来说，“虽有其方，犹不免残害之疾”，因而著《肘后卒救方》(简称《肘后方)，也作《肘后备急方》)。书中药方都是易得的便易药，所以是一部具有普及推广意义的实用方书，一直为后世所重用。《肘后卒救方》后经陶弘景整理补充为《肘后百一方》。金代杨用道又进行增补，名为《肘后方》。这一时期还有大量方剂学著作问世。除了各种内外科医方外，还有《疗目方》、《疗耳眼方》、《小儿方》以及少数民族和国外的药方，说明当时医药学的发达。可惜，这些书多已亡佚。

（五）《诸病源候论》

巢元方(605～676)是隋大业中的太医，受命对前人的经验进行总结，“共论众病所起之源”。后以他为主编著成《诸病源候论》。全书共50卷，分67门，1 720论。论述了内、外、妇、儿、五官等各科疾病的病因、病理和病状，反映了我国医学理论的发展和临症实践的提高，成为我国历史上内容最丰富的病源学说的专著。其中对一些疾病的起因有不少创见，突破了前人的定论，发现和描述了一些真正的病源。

（六）《新修本草》

隋唐以来，政权统一，经济文化迅速发展，用药经验不断丰富和提高，外来药物和新发现的药物日益增多，此时制订一部新

的本草，不仅是社会的要求，而且也具备了可能的条件。唐显庆二年(657 年)苏敬提议修订新本草，并于公元 659 年撰写成《新修本草》颁行。这是我国也是世界上第一部国家颁行的药典。那时集中了二十多个方面的人才，查阅了国内图书中的大量书籍，并要全国各地提供药物图样，仅用二年多的时间便编成颁行。这是个人著书不可能做到的。它标志着科技活动在规模上的新飞跃。全书共 54 卷，分药图、药经、本草三部分，收入药物 844 种，其中考证过去本草经籍所载有差错的药物共有四百多种，增补新药百余种。书中详细记载了药物的性味、产地、功效及主治的疾病，还收集了全国郡县所产的药物标本描绘成图。这是我国最早的药物图谱。该书颁行后很快流行全国，在统一用药方面起了很大的作用，并对其后本草著作的编著产生了很大影响。

(七)临症医学

这时期临症医学取得了显著的进展，出现了大量的方书。隋代所撰《四海类聚方》达 2 600 卷，为前代所未有，可惜早已佚亡。现存著名的有《千金方》和《外台秘要》。《千金方》是《千金要方》和《千金翼方》的简称，作者是唐代名医孙思邈(581～682)。《千金要方》是孙思邈积五十多年的临症经验，结合历代医学典籍而著成的。书中内容包括中医基础理论和临症各科的诊断、治疗、针灸、食治、预防、卫生等。《千金翼方》是前者的重要补充。在《千金要方》中作者改变了以往那种论病、用方、用药都本古代医经的做法，他兼取各家医说和成就，结合自己的经验，加以发展。他这种冲破传统、大胆创新的精神，开了中医学史上的一代新风。《外台秘要》是唐朝王焘(约 670～755)撰写的一部综合性的医学著作。王焘在朝二十余年，此书为出守邺郡时所作，故称外台。作者王焘虽不是一个专业医师，但他对医学作了深入的研究。书中搜集了唐以前的许多医药著作和秘方。它先述医理，后列药方，共载药方六千余条，唐以前的许多已佚方书内容，赖它得已保存。在

医药史上具有相当的价值。

(八)藏医

生活在西南一带的藏族人民，在长期的生活实践中，积累了丰富的医药经验。藏族人民有天葬的习俗，经常解剖尸体，对人体生理解剖学的认识比汉族更为清楚。到8世纪时，对人体神经的分布和功能，已有较深的认识。认为从脑部发出的条条“白脉”(神经往往是白色的)，支配着全身部位。并且知道有跳动的动脉和不跳动的静脉，它们是流通气血的管道。值得特别提起的是，近代生物学才了解到胚胎发育过程经历了生物进化史上的鱼类、爬行类和哺乳类三个阶段，而这一点，藏族人民在一千二百多年前就已认识到了。

随着对外文化的交流，藏医既吸取了汉族医学的经验，也吸取了邻国印度的经验，逐渐形成了具有本民族特色的藏医学体系。8世纪左右名医宇妥·元丹贡布广泛搜集民间医药，翻译汉族医学著作，主持编写了《四部医典》(藏名《居悉》)，它是藏医学的经典著作，对藏医学的形成与发展作出了重要贡献。

在诊断方法上，藏医除采用与中医相似的望、闻、问、切外，还有尿诊。藏医用药方法有多种形式，以丸药最常用。除药物治疗外，还有穴位放血、穿刺、灌肠、冷热敷、导尿、熏蒸治疗、药水浴身、油脂疗法等，有的至今沿用。

四 炼丹术与化学

炼丹的本意是指望借金石的精气，使人长生不老，得道成仙。因此，它是伪科学的。但是在炼丹实践中人们常发现物质变化的种种现象，对其中的某些规律进行了有益的探讨，为化学初级阶段的发展作出了一定的贡献。

(一)炼丹家及其著作

晋代葛洪(约281～341)是我国历史上最著名的炼丹家。他在

综合前人经验的基础上，亲自炼丹数十年，积累了丰富的物质变化的知识和经验。他的著作《抱朴子・内篇》中有炼丹术的篇章："金丹"（利用无机物炼制长生药）、"仙药"（植物性药物"五芝"的作用）和"黄白"（炼制供药用的人造黄金和白银的方法）三卷。

南朝的陶弘景是一个大炼丹家，有不少关于炼丹和本草的著作，除了前面提到的《神农本草经集注》外，大都亡佚，现仅存《真诰》和《养性延命录》。前者讲神仙授受真诀，后者讲长生不老之术。

唐代孙思邈和他的弟子孟诜，既是杰出的医学家又是有名的炼丹家。再如陈少微及其著作《大洞炼真宝经修伏灵砂妙诀》、《大洞炼真宝经九还金丹妙诀》，张果及其著作《神仙得道灵药经》、《丹砂诀》等，对后世的炼丹化学和药物都有很大的影响。开元年间，唐玄宗下令当时的道观搜集道教的典籍，汇编成《三洞琼纲》共 3 700 多卷，是为《道藏》的开端。现存《道藏》增收了唐、宋以来的很多著作，内容十分庞杂，是我们研究炼丹术中化学知识的宝贵资料。

（二）炼丹术中的化学知识

液态金属水银在先秦时就为人们发现和使用。由于丹砂（HgS）具有升华、还原等特殊的物理和化学性质，引起了炼丹家的极大重视。《抱朴子・内篇・金丹篇》记有溶解矿物和非矿物的许多方子。从这些方子可知，当时人们已利用消（即硝）石（硝酸钾）和酸的混合液来溶解金属或矿物，尤其是黄金这种很不活泼的金属，可用水银或氢氰酸溶解。在从丹砂中提取汞的同时，人们还发现汞能与硫磺化合而还原成丹砂。这大概是人们用化学方法制成的最早的产品之一。

由于铅具有和汞相类似的化学变化，很早就引起了炼丹家的重视。葛洪明确指出铅经过化学反应后变成胡粉，再经过加热反应后，会变成红色的黄丹（四氧化三铅）。黄丹又能经化学反应分

解出白色铅。

铁对铜盐的置换反应早在西汉《淮南万毕术》中就有记载。葛洪亲自进行实验，用在铁的表面涂抹硫酸铜溶液的方法，发现只有铁的表面发生置换反应。陶弘景又扩大了铜盐的范围，不只限于用硫酸铜。这一反应过程的发现，奠定了宋元时期水法炼铜—胆铜法的基础。

另外，葛洪已了解到碱性碳酸铜有杀菌作用。陶弘景有关于烧石灰的确切记述，并且知道用燃烧的方法来鉴别硝石（硝酸钾），这开了近代化学用火焰法鉴别钾盐的先河。

（三）炼丹术的发展

唐代在炼丹实验中一个显著的进步，就是用药趋向小数量按比例向定量化发展。过去用斤作单位，至唐用两作单位（至宋代用两和钱）。用汞和硫磺制造丹砂的技术在唐代已相当成熟，一般用量是汞 1 斤、硫磺 3 两，利用汞和硫制成硫汞，再与食盐反应，然后升华，炼制成水银霜（$HgCl_2$）的技术，当时也很完善。

此时的炼丹方士还开始用朴硝（硫酸钠）和芒硝（硝酸钾）的水溶液来提取硫酸钾的结晶，利用汞和锡制造锡汞齐。对铁矿也有一定认识。

在火法炼丹的过程中，人们已认识到温度对化学反应的作用，并通过调节炭量和燃烧时间来控制温度。在八九世纪左右，人们已开始用硫磺、硝石和炭混合在一起，加热反应成了最初的黑火药。

（四）矿石药物和化学药物

唐时的炼丹方士很注意各种药物的产地，对各地所产药物特别是矿物药的性质有较为详细的记述，知道辨别药物质量的优劣，并且有矿物药的专著。约成书于公元 644 年的《金石簿五九数诀》就列举了各种药物的形状、品质和产地。公元 818 年梅彪撰的《石药尔雅》，更是一部矿物药物的同义词典，书中列举了 62 种

药物的 335 种异名。

炼丹中所得到的化学药物，在医学上得到广泛的运用，这是炼丹术的最精华部分之一。孙思邈的《千金翼方》中记有“飞水银霜法”，是一种毒性很小的贡化合物氯化亚汞($HgCl$)，可治疗疥癣、湿疹等皮肤病。他还制造了一种叫“太一神精丹”的化学制剂，含有氧化砷、氧化汞，可杀灭多种原虫和细菌。外用可治皮肤病，内服可治回归热和疟疾，而且具有健身作用。王焘的《外台秘要》记有另一种水银霜法，是一种氯化高汞($HgCl_2$)，有很强的杀菌防腐力。《唐本草》中记有用白锡银箔和水银合制而成的“银膏”，类似现代牙科用的填充剂，这些都是炼丹术对医学的贡献。

此外，当时已有十几种炼丹设备：丹炉、丹鼎、水海、石榴罐、甘埚子、抽汞器、华池、研磨器、绢筛、马尾罗等，这些在今天看来也是十分完善的。炼丹术远传阿拉伯和欧洲后，为近代化学作出了很大贡献。

五 制瓷、冶金与纺织

(一)制瓷

两晋南北朝时期我国的制瓷技术相当成熟。南方主要是青瓷，北方主要是白瓷。青瓷是用还原焰使产生氧化亚铁(呈绿色)而成。据分析，在瓷釉中，如果氧化亚铁的含量在 0.8%～3%之间，烧出来的瓷器就能出现淡绿色；如果含量大于 5%，并且不断增加，绿色就由淡变浓；如果铁的成分太多，不仅还原发生困难，而且颜色渐呈暗褐色，甚至近似于黑色了。随着原料的精选、氧化亚铁含量的控制以及火候的掌握等技术水平的提高，唐代的青瓷生产达到了一个新的高度。越窑(今浙江绍兴、余姚一带)的“千峰翠色”瓷，就是掌握釉中氧化亚铁的成分在 1%～3%时获得的。五代时柴窑(今河南郑州一带)的青瓷也盛极一时，有“雨过天青”的

美誉。

白瓷的呈色剂主要是氧化钙，它要求铁的含量越少越好。因此，白瓷的烧制说明了对瓷土筛选技术的提高。我国的白瓷萌芽于南北朝，成功烧制于隋代。到唐代，邢窑(今河北内丘)的白瓷有“类雪”之誉。江西景德镇和四川大邑制瓷的技术在我国是名列前茅的。

从挖掘出的南北朝时期的瓷窑遗址和许多窑具看，当时已经有了相当的规模。窑具的使用可以更充分地利用窑中的空间和热量，既可增加瓷器的产量，又可提高瓷器的质量。这些窑具一直为后世所沿用。

(二)冶金

南北朝时期制钢技术出现了新的突破。《重修政和经史证类备用本草》卷四玉石部引陶弘景语:“钢铁是杂炼生鍒作刀镰者”，这是最早明确记载用生铁和熟铁合炼成钢(即灌钢)的文献资料。北齐的綦母怀文用灌钢法造宿铁刀，先把含碳高的生铁熔化，浇灌到熟铁上，使碳渗入熟铁，增加熟铁的含碳量，然后分别用牲尿和牲脂淬火成钢。牲畜的尿中含有盐份，用它作淬火冷却介质，冷却速度比水快，淬火后的钢较用水淬火的钢硬；用牲畜的脂肪冷却淬火，冷却速度比水慢，但淬火后的钢比用水淬火的钢韧。由此可见，不但炼钢技术有较大的发展，淬火工艺也有了提高。灌钢法在坩锅炼钢法发明之前，是一种先进的炼钢技术，对后世有重大的影响。

隋唐时期制造农具和兵器，需要大量的钢铁。在建筑工程中，也采用灌铸铁或铅以加强构件之间的联系的方法。唐代贸易的繁荣，又需要大量的铜币。这些都大大促进了冶金行业的发展。炼炉和鼓风技术也都有所进步。灌钢法得到推广普及。唐初铸造“开元通宝”时，使用了失蜡法。《唐会要》中关于失蜡法的记载是我国最早的文献记载。这时期大型铸造也较为突出。据《集异

记》记载，隋代的澄空曾在晋阳铸成高达70尺的铸铁佛像。唐武则天时，用铜铁200万斤在洛阳铸造“天枢”，高达105尺。我国现存最早的特大铸件首推五代时期铸造的沧州大铁狮。铁狮高达5.3米，长6.8米，宽约3米，重约10万斤。这种特大型的铸件，是使用多块泥范组合铸成的，反映了当时造范和合铸技术已相当高明。这对宋代的铸造业影响很大。

现存唐代的一些玲珑剔透的金银器饰，不仅向人们说明了当时使用简单车床的切削、抛光以及焊接、铆、镀、凿刻等工艺技术已达到较高的水平，而且大量质地优良的银器的出现也向人们表明当时冶银术的进步。我国古代的银大部分是从含银的粗铅中提炼出来的，即以方铅矿与辉银矿的共生矿石，先炼成粗铅，再提炼出银。1971年发掘出土的章怀太子李贤墓内有6块炼银渣块，经化验分析，知是用吹灰法炼银而遗留的渣块。说明吹灰法在唐代已较为广泛地应用。吹灰法的使用提高了银的纯度和回收率，是古代比较先进的炼银方法。

(三)纺织

纺织在人们的生活中影响很大。随着经济的不断发展，唐代纺织生产和纺织技术达到了一个新的水平。唐代的丝织品以绫、锦最为突出，尤其是纬锦。南北朝时始有纬锦，唐代的纬线起花纬锦，有五彩花卉、禽兽行云之锦，十分华丽。纬线起花受织机的影响较小，大大的增加了织物色彩的美化，丰富了织物花样的内容。从已出土的实物可以看出，唐代机制纬锦的能力已达到完全成熟的程度。

印花工艺在这时也有新的成就。印花工艺大致有纹缬、夹缬、蜡缬和介质印花等。尤其是介质印花是唐代在印染技术上最主要的成就，介质印花是以助剂为印染原料，不是直接印染，而是根据染料的性能进行浸染。它可分为碱剂印花、媒染剂印花和清除媒染剂印花。介质印花是我国古代印染技术上的一大进步，它为

人们提供了更加丰富多采的织物。

六　雕板印刷技术和造纸技术

(一)雕板印刷术

隋唐之际，我国经济文化异常繁荣发达。那时早已有了笔墨纸张等物，并从石刻和印章中掌握了刻印的工艺技术和反文印刷的原理。在这种坚实的物质和技术基础上，被誉为“文明之母”的划时代发明的雕板印刷术就应时而生了。雕板印刷，一般选用纹质细密坚实的木材为原料。虽然刻字费工，但由于木刻工艺简单，费用低廉，印刷便捷，较手写传抄优越百倍，因而深受人们欢迎，而不断推广和传播。

早期的印刷活动主要是在民间进行的。大致用于三个方面：一是用于宗教活动。隋唐之际，佛教盛行，佛像、佛经的需求量很大，而绘画、手抄费工费时，满足不了需要。二是用于刻印诗集、音韵书和教学用书，尤其是诗。中国文学的首唱是诗，而中国诗的辉煌顶峰则在唐代。那时诗歌广泛流传，为男女老少所喜爱。三是用于历法、医药等科学技术书籍的印刷。尤其是农业生产发达，中央政权颁行的历法往往发行较慢，满足不了农村掌握农时的需要，因而民间刻印历法出售的活动很活跃。至9世纪，雕板印刷已很普遍，成为一种新兴的重要手工业部门，对人们的经济生活和科技文化生活起着越来越重要的作用。

五代时，我国虽处在战乱时期，但印刷术仍继续发展。士大夫阶层从民间印售书籍过程中，了解到印刷的重要性，因而五代时在官方兴起了刻印儒家经典的活动。后唐明宗长兴二年(931年)，冯道等倡议刻印儒家经典。于是，自长兴三年起，至后周广顺三年(953年)前后22年，刻成印板《九经》、《五经文字》和《九经字样》各二部，并印刷出售。自此，雕刻书籍成为政府的出版事业。与此同时，私家的刻印业依旧很活跃，刻印书籍的范围

不断扩大。五代时始兴的印刷业，为宋代印刷术的高度发展奠定了基础。

(二)造纸技术

我国古代曾用简、帛之类作为书写材料。随着造纸技术的革新和进步，魏晋南北朝时期，纸已是十分普遍的书写材料。当时北方主要以麻、楮造纸；南方多用藤造纸，质地优良。在工艺技术方面，两晋南北朝时已使用帘床设备捞纸，提高了工效，又使纸张有一定的规格。为防止纸张虫蠹，染色的“潢治”法，也已经发明并得到应用和推广。这一时期的纸张质地匀细，外观洁整平滑，数量大增，质量已达到较高的水平。

印刷术的发明和发展，进一步促进了造纸业和造纸技术的发展。隋唐五代时期，传统的麻纸、楮皮纸、桑皮纸、藤纸等继续发展，新的造纸原料如竹、檀皮、麦秸、稻秆等不断开拓利用。纸的品类和产量都相当可观。唐玄宗时，仅每月发给集贤书院四川产的麻纸数量就达5 000番之多。中晚唐时期，竹子开始取代藤在南方成为造纸的原料，并得到迅速发展。竹子纤维较硬易断，技术处理比较困难，竹纸的问世，标志着我国造纸技术已经达到相当精湛的程度，为宋代造纸技术的进一步发展打下了基础。印刷术和造纸技术的发达又进一步促进了科学文化技术的传播，印刷术和造纸术传到国外后又为世界科学发展作出了不朽的贡献。

七 建 筑

(一)佛教建筑

佛教的盛行导致了寺院建筑的大量出现。早期的寺院布局方式基本上依照西周以来的宫室布局，只是多了一个佛塔建筑立于寺院中心。唐代一般将大佛塔布置在大殿之前，也有的建在寺侧，构成塔殿并列的形式。佛塔建筑源于印度，它的原形是一个半球形，犹如喇嘛塔。传入中国后，塔式建筑与中国固有的楼阁建筑

很快结合起来，成为中国的楼阁式塔。嵩岳寺塔是我国现存最早的著名寺塔，该塔坐落在河南省登封县嵩山南麓的一个山坳中。外部12角，内部8角，共15层，高40米，建于北魏，是一座内部楼阁式，外部密檐式的砖塔。塔下层的倚柱和佛龛形式是古印度风格，出檐用砖迭涩挑出，呈凹形曲线。整个塔身合理收分，线条柔和圆润，虽是用砖建成，却没有给人生硬的感觉。此塔至今已历时一千四百多年，几经地震等自然灾害仍巍然屹立，说明了我国古代匠师高层建筑的设计和技术水平的高超。

另一类佛教建筑是石窟寺，它是依山崖陡壁开凿出来的洞窟，工程浩大，雕刻精美。我国的大型石窟多开凿于5世纪中叶至6世纪后半叶。现在的大型石窟群远较印度为多，仅敦煌莫高窟一处就有一千多洞窟。它源于印度，又结合中国的建筑特点，成为独特的石窟建筑。由于石窟是人工开凿而成的一种建筑，窟壁上雕绘了殿宇、楼阁、亭台、佛塔以及房屋等多种建筑形象，因而反映了当时的建筑风貌。

佛教建筑还有一类是木结构建筑，它是以我国传统的木结构为主要方式建成的。如唐代五台山佛光寺东大殿，建于公元857年，是现存唐代建筑中一座规模最大的木结构建筑。佛光寺利用山坡地形布局建成，东大殿建在一个高台上。大殿面阔七间，进深四间，由立柱、斗拱、梁枋组成梁柱式的构架，属唐代中型的佛教建筑。殿的内外柱列和梁枋互相联结，组成一个稳固的整体，并以柱的“侧脚”加强构架和榫卯结合。殿的外檐斗拱使用下昂和横拱，形制显得雄壮有力，其中“昂”斗拱起着挑悬和檐部受力平衡的作用。内柱上使用偷心拱上承平闇(小方格式)，使殿内整洁明亮。屋檐的翼角翘起以由中心柱向角柱逐渐增高的方法构成。屋顶的“举折”(即曲线轮廓)由各层纵横的大小梁枋和檩条标高的变化形成。出檐深远，采用宏大的斗拱承托，给人以屋顶厚重有力的感觉。它具有一套明确完整的构架体系，反映了唐代

木结构建筑技术已达到成熟的程度。

（二）**都市建筑**

随着隋朝的日益强大，原有的长安城已不能满足当时社会政治和经济文化发展的需要。隋文帝于开皇二年(582 年)命宇文恺等在长安城东南的龙首山南面平原设计兴建大兴城，建造面积达 84 平方公里。宇文恺是我国古代著名的建筑学家，一生好学，擅长城市规划和建筑，是隋朝负责建筑的高级官员。当时兴建的东都洛阳，开凿的广通渠，修复的鲁班故道和长城等大型土木工程，都是在宇文恺的规划和领导下完成的。他使用的图纸、模型和设计方法，是我国建筑技术上的一大突破。整个城市设计合理，布局东西对称，里坊区划分明，11 条大街东西平行，14 条大街南北并列，城内有宫城和皇城，还分为 108 个里坊。足见工程的规划、设计、人力、物力的组织和管理都是相当精细和严谨的。在规划设计和建设施工中，还考虑了地形、水源、交通、军事防御、环境美化、管理及经济文化等多方面的因素，解决了一系列复杂的问题，表现出当时我国的经济力量、城市建设和科学技术的高超水平。

唐代的长安城是在大兴城的基础上进一步改造扩建而成的，其规模之宏大、建筑技术之高超，堪称当时世界之最，很值得后人借鉴和学习。

（三）**桥梁建筑**

公元 282 年，在洛阳宫附近跨七里涧建造的旅人桥，日用 75 000人，历时半年建成。材料全用大石，下面是圆孔，可以让大船通过。这说明规模较大的石拱建造技术在晋代已达到相当高的水平。此外，根据地形特点建造的悬索桥，以及由于军事或临时需要而修建的浮桥也早已出现。随着社会经济的繁荣和交通运输的需要，至隋唐时期，我国桥梁建筑又掀开了新的一页，建造了不少桥梁，其中最著名的是今河北赵县的赵州桥(又名安济桥)。它

于隋开皇、大业间(590～608)，由李春创建。单孔，桥长50.82米，宽约10米，跨径37.02米，拱圈矢高7.23米，上设4个小拱，以减轻重量，节省材料，又便于排洪，增加美观。其设计与工艺之新，为世界桥梁史上石拱桥的卓越典范。它建成后，成为历代南北交通之要冲。历经无数次洪水和多次严重地震等自然灾害的考验，至今仍巍然横跨在洨河之上。

第二章 天文与数学活动

第一节 天 文 历 法[1]

两晋至五代，天文工作者根据实际观测，修正和发展了历代对天体运动的认识。在天文历法方面制造了更精密的天文仪器，取得了一系列新成就。还修订了历法，出现了大量的天文、历法书籍，补充了我国古代天文学体系的内容。另外，唐代有不少印度天文历法家居住在中国，如瞿昙、迦叶、俱摩罗、金俱咤等，他们在中国著书立说，研习天文历法。但他们的著作大都已经失传。因我国的天文体系与印度不同，他们的活动似乎对中国的天文历法没有多大影响。

一 岁 差

由于太阳、月亮和行星对地球赤道突出部分的吸引，地球自转轴的方向不断发生微小的变化，因而冬至点在恒星间的位置逐年西移，每年的移动值叫做岁差。自西汉以来，人们就认识到冬至点位置的变化，但没有提出岁差的概念，也没有意识到这一变化对历法的影响。东晋时虞喜首次提出了岁差的概念，并开始探索岁差的规律，这是我国天文历法史上的一大发现和创新。约公元330年前后，虞喜通过同一时节星辰出没时刻与古代记录的比较，发现恒星的出没比古代提前了，说明二分(春分、秋分)点、二至(冬至、夏至)点已向西移动。由此他得出：太阳周年视运动一周

---

① 杜石然，等编著. 中国科学技术史（上册）. 北京：科学出版社，1982

天(古人划周天 365 $\frac{1}{4}$ 度,每天日行一度,一回归年为一周天)并非就是冬至一周岁。由于冬至点西移,太阳从今年冬至到明年冬至,并没有回到原来在恒星间的位置。所以应该“天为天,岁为岁”。他根据历史记录进行推演计算,得出了 50 年差 1 度的结论(古时岁差都指赤道岁差)。这一数值虽与实际值有一定差距,在当时也没有从理论上了解和解释岁差的成因,但这是我国历史上第一次探索岁差的规律,其意义是深远的。

继虞喜之后,南朝何承天对岁差进行了长时间的研究,他利用徐广 40 多年的观察材料,和自己 40 年观察研究的资料,把上古时代的天象与当时的观察记录,进行比较,经过计算,得出 100 年差 1 度的结论(现在的推算是约 77.5 年差 1 度)。

至刘宋,祖冲之首次把岁差应用到他编制的《大明历》中去,这对历法推算精度的提高起了重要的作用。虽然他所用的岁差常数比较粗略,但自此以后回归年和恒星年两个概念渐为人们所接受,成为制定历法时必须考虑的因素之一。隋代的刘焯和唐代的一行总结了前人的经验,采用了比先辈准确的岁差值。唐以后,人们又不断对岁差进行新的研究,取得了更为准确的结果。

二 张子信对天文学的贡献

张子信是北齐河内(今河南沁阳)人,天文学家。他在一个海岛上利用浑仪对日月五星进行了三十多年的观测,从而发现了太阳和金、木、水、火、土五星视运动不均匀性的现象。他指出“日月交道,有表里疾迟”,“日行在春分后则迟,秋分后则速”,“五星见伏,有感召向背”。这是我国古代关于太阳和五星视运动不均匀性的最早记载,是我国古代天文学史上继岁差现象发现之后的又一划时代的发现。它开辟了我国对太阳和五星视运动进行更准确、更深入研究的新方向。

准确地推测与预报日食是我国古代历法的主要内容，以此作为衡量历法优劣和存亡的重要标准。张子信经过长期观测，发现当合朔发生在黄道和白道交点附近时，如月在黄道北则日食；如月在黄道南，虽然在食限内，也可能不发生日食现象。这种现象就是视差(在地球表面观测天体和在地心观测天体所产生的天体视位置的差异)对交食的影响。这一发现大大提高了推算和预报日食的精度，并促使刘焯在撰《皇极历》(604 年)推算交食时，第一次考虑到了视差对交食的影响。

张子信也是我国古代首先发现行星运动速度有周期性变化的天文家。

三 天文常数精度的提高

两晋南北朝时期，随着回归年和朔望月长度测定的进步，19 年 7 闰法已显得不够精确。公元 412 年，北凉赵𢾺在《玄始历》中提出了 600 年中有 221 闰的新闰法，从而首次打破了旧闰法。公元 463 年，祖冲之在《大明历》中提出了每 391 年 144 闰的闰法，得到了更为精密的结果。祖冲之推算回归年的长度为 365.242 814 8 日，和现在的推算值只差 46 秒。祖冲之还定出精密的交点月(月亮连续两次经过黄道和白道的同一交点所需的时间)为 27.212 23 日，和现代观测所得的数据比较，只差 10^{-5} 日。对五星周期的数值也比以前的历法精密，其中误差最大的火星周期也没有超过 10^{-2} 日，误差最小的水星周期已接近真值。这一时期的历法中给出的朔望月(误差在 1 秒左右)、近点月的数值(误差在 6 秒左右)也都达到了很高的水平。

至隋唐时期，由于天文仪器的改进和人们的长期观测，天文常数的精度又有了新的提高。公元 608 年，张胄玄在《大业历》中，首创了利用等差级数提高行星动态表精度的方法，提出了令人惊叹的五星会合周期的准确值。火星误差最大为 0.011 日，木星和

土星的误差均为 0.002 日，水星仅差 0.001 日，而金星则达到密合的程度。又如，这一时期的十余种历法所用交点月的长度值，同理论推算值之间的差异，大多在 1 秒以下；近点月长度值的误差在 1.5 秒左右，已达到了历法史上精确度的高峰。公元 726 年，郭献之在《五纪历》中采用了 716 个朔望月 122 次食季的交食周期，这已与西方 19 世纪末的计算周期的结果等同。公元 893 年，边冈在《崇玄历》中又使用了 3 087 个朔望月有 526 食季的交食周期，由此推算得交食年的长度为 346.619 541 2 日，这同理论推算值仅有 14 秒的误差。再如，公元 822 年，徐昂的《宣明历》所用的黄赤交角值为 23°34′55″，仅比理论值小 37″。所有这些都反映了隋唐时期历法发展的新水平。

四　星图与浑仪

一张优良的星图是进行天文观测的重要工具。我国的星图起源于盖天说的演示仪器——盖图。这是一种圆型盖天式的星图，也是我国古代星图的一种主要型式。西晋太史令陈卓综合了前人的工作，使这类星图定型化。他“总甘(战国甘德)、石(北魏石申)、巫咸三家所著星图”合并绘制成有 283 官，共 1 464 颗星的圆型盖天式星图。这一成果一直为天文学家所沿用。至唐初，王希明著《步天歌》，以七字一句的诗歌形式专门介绍了陈卓的星图。另外，在敦煌发现的绢质星图(约绘制于 940 年前后)，是现存世界上最早的星图，画有 1 350 多颗星。现存英国伦敦博物馆。

欲使天文观测更加精确，就离不开天文仪器。自西汉以来，我国就陆续出现了不少有关天文仪器(如东汉张衡于公元 117 年创造了世界上最早用水力转动的仪器浑天仪)。至公元 412 年，在晁崇和鲜卑族天文学家斛兰主持下，铸成了我国历史上唯一的一台铁制浑仪，底座上设有“十字水平”，以校准仪器安装，这是我国历史上利用水准仪的开端。5 世纪初，钱乐之制造了两具仪器，一

具是属于传统的浑仪，一具是真正的天球仪。唐初，李淳风在铁浑仪的基础上进行改革，于公元733年制成一架新型的浑天黄道铜仪，同时写了《法象志》7卷，论述了前代浑天仪之得失。李淳风的浑仪吸收了铁浑仪设有水准仪的优点，又在古代浑仪的六合仪和四游仪之间，加了三辰仪，使浑仪由二重变为三重。三辰仪由黄道环、白道环和赤道环三个圆环相交构成，分别用以量度太阳、月亮和恒星的位置。三辰仪可以绕极轴在六合仪里旋转；作为观测用的四游仪可以在三辰仪中旋转。这样就可以直接用来观测日、月、星辰在各自轨道上的视运动。由于黄白交点在黄道上有较快的移动，李淳风在黄道环上打了249对小洞眼，每过一个交点月，就把白道移过一对洞眼，较好地解决了实际的需要。只可惜，李淳风的浑仪不久便亡佚。公元725年，梁令瓒制成铜黄道游仪，继承了李淳风的黄道浑仪并有所改进，在赤道环和黄道环都每隔一度打一个洞，使黄道环可以沿赤道环移动，白道环可以沿黄道环移动。一行称之为："动合天运，简而易从。"

唐代高僧一行，在准备制历时，还与梁令瓒等人一起制造了一架浑仪。它以巧妙的轮轴结构构成，注水激轮，令其自转，一日一夜，运转一周。这不仅发展了张衡的水运浑天仪，而且还安装有自动报时器，类似现代钟表上的擒纵器装置。这在天文钟和机械史上是一大创造，走在了欧洲14世纪第一具机械时钟的前面。

五 定朔法的应用

我国在历法上一直沿用传统的平朔法(只按日、月的平均视运动来计算朔望的方法)，但此法有不少缺点。公元443年，何承天首先创立和运用了定朔(对平朔进行月亮和太阳视运动不均匀性的修正，由此所得的朔称为定朔，何承天只考虑了月亮)的方法。但未被刘宋政权采用。其后，在历法中关于定朔和平朔的争论十分

激烈，几经反复，延续了200多年。至公元665年，唐高宗采用了李淳风所制定的《麟德历》。该历以刘焯的《皇极历》为基础加以改进，对过去定历时“参差不齐”的情况加以统一，简化了计算过程。同时采用定朔方法，避免了连续出现几个大月或几个小月的现象，还废除了闰周，直接以无中气的月分置闰月。正因如此，《麟德历》倍受好评。自此以后，定朔代替了平朔，在后世历法中一直沿用。

六 一行与《大衍历》

僧一行(683～727)，姓张名遂，魏州昌乐(今河南南乐县，一说今河北巨鹿)人，出家后取名一行。一行从公元725年开始着手编修新历，于公元727年写成《大衍历》草稿。《大衍历》以刘焯的《皇极历》为基础，并加以发展。其内容和结构都很有系统，表明我国古代的历法体系已经完全成熟。在明末用西方方法编历之前，各次修历都仿效《大衍历》的结构。《大衍历》可以称得上是当时最好的历法，其中的科学思想值得后人称道。

第二节 数学工作

自两晋至南北朝时期，出现了几部有声望的数学著作，流传至今的有《孙子算经》、《张邱建算经》、《夏侯阳算经》、《五曹算经》和《数术记遗》。据现有资料，我们还难以定出它们确切的成书年代及作者的生平事迹。

《孙子算经》是这几部著作中最早的一部。书中关于算筹的纵横布列制、算筹的乘除法则及度量衡制度的记述，对当时的初学者是十分有益的，在今天则是宝贵的数学史料。该书给出了目前所知的世界数学史上关于一次同余式组的最早例子。这也是该书超过《九章算术》的主要部分。

《张邱建算经》是这几部著作中篇幅最长的一部，作者在序言中就指出：分数除法是十分麻烦的，于是明确地提出了交叉相乘的分数除法法则。印度人在9世纪也曾知道这个法则，但后来失传了。欧洲直到16世纪才被施蒂费尔(Stifel)重新发现。《张邱建算经》的内容十分丰富，涉及了《九章算术》的各个方面，其中不定方程问题和等差数列问题很有创新。

现存的**《夏侯阳算经》**可能是通过唐代的韩延(780～804)结合当时的实际需要重写，后冠以《夏侯阳算经》之名而流传下来的，原著可能要好些。书中关于算筹运算的简便方法是很有意义的。其它方面则远在《九章算术》之下。有人曾怀疑《夏侯阳算经》中的某些分数名称来源于印度，如1/2称为中半，1/3称为少半，2/3称为太半，1/4称为弱半等等。但这种论证是不能令人信服的。事实上，这些术语是漏壶的分度，在我国天文测量上也有类似的术语。太半与少半见于《九章算术》，其他名目在《后汉书》中就已经出现。

《五经算术》和**《五曹算经》**都是甄鸾(约500年前后)的著作。《五经算术》名为“算术”实为“五经”，即作者是借算术之名来研究五经。从数学的角度看，没有什么研究价值，所以我们也不列专章论述。《五曹算经》是官府胥吏的一部初等实用手册，内容十分浅显，基本上都是整数或分数的四则运算问题，学术价值不大。

《数术记遗》的作者到底是谁，一直有争议。有的认为是东汉徐岳，有的认为是甄鸾，各有其道理，也都有其不足。究竟如何，还待进一步探讨。《数术记遗》中最有价值的内容是关于珠算的记载，书中的珠算(板)与今天的珠算盘十分相近，实为我国珠算的起源。日本的山崎与右卫门博士在《东西算盘变迁及发达史论》一书中，认为中国《数术记遗》中所述“珠算”工具，与欧洲沟算盘属同一类型。又据《汉书》中关于在公元前后中国与大秦(今称

罗马帝国)已有交往的记载，推断中国算盘从罗马传入。我们依据史实和算盘的结构、计数法、计算法可知，中国算盘是独创的，那种认为“中国算盘来源于罗马”之说纯属臆断。[①]

在两晋至南北朝的佚书中，最重要的大概是祖冲之(429～500)的《缀术》。这是一部很有名望的著作，被认为远比这一时代任何其他数学著作都需要作更多研究的著作。然而只有很少一部分人能够读懂它。这部书的内容可能与祖冲之对天文历法理论中的有限差分法有关。尤其可能对精密圆周率的研究、三次方程的解法及正确的球体积计算有关。今人钱宝琮曾提出一些相当深刻的理论，来证明祖冲之在此书中曾详细说明了分数求近似值的方法，并引入了一元二次方程和一元三次方程[②]。祖冲之继承和发展了刘徽的数学理论，并形成数学家风，他的子孙在数学方面的成就也很显著。尤其是祖暅，在刘徽提出的“牟合方盖”的基础上，解决了球的体积计算问题。关于佚书《缀术》，我们可从《隋书·律历志》、《缉古算经·序》、《九章算术》李淳风的注中了解到它的点滴情况。

这一时期，天文历法与数学的联系更加密切，两者相互促进，共同发展。隋代天文学家刘焯在《皇极历》中首创二次内插法，此后唐代李淳风在《麟德历》中广泛应用。至唐中期，僧一行在《大衍历》中不仅使用了等间距内插法，而且又创立了不等间距二次内插法。这种方法大大提高了天文计算的精度，并一直影响到明代历法的计算。

唐代的数学专著当首推唐初王孝通的《缉古算经》。该书结合

---

① 华印椿. 中国珠算史稿. 北京：中国财政经济出版社. 1987，40～52

② 钱宝琮. 中国算学史. 见：中央研究院历史语言研究所论文集(A 辑). 北平，国立中央研究院历史语言研究所编辑出版，1932，6

土木工程问题给出了一系列一元三次方程问题，这是我国数学史上现存的一元三次方程的最早实例。王孝通虽然没有说明具体的求解步骤，也没有给出更高次数的方程问题，但是这不但比《九章算术》中的一元二次方程有了进步，而且对此后我国一元高次方程的求解也产生了深刻的影响。

李淳风(602～670)是唐初天文学家、数学家，也是中国历史上最伟大的数学著作注释家之一。唐初为了算学馆教学上的需要，李淳风与梁述共同撰注并审定了十部数学著作:《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》、《缀术》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《夏侯阳算经》。后来，《缀术》失传，便代之以《数术记遗》，统称《算经十书》(北宋元丰七年即公元1084年第一次刻印出版)。这对数学的继承和发展作出了很大的贡献。当然，作为对数学上的创造发明来说，李淳风是无法和王孝通媲美的。

隋唐时期，还有一件有历史意义的事，那就是在我国历史上开始建立了数学教育制度。隋代虽然存在的时间不长，却在那时建立了它的最高学府——国子监,并在国子监设立了明算科(国子监相当于现在的国立大学,明算科相当于现在的数学系)，在我国首创了高等数学教育机构。它设置了算学博士、算学助教，招收学生从事数学教育。至唐代，数学教育得到了进一步的发展，以《算经十书》作为主要课本。这种制度也影响到我国宋代的数学教育。

随着中外经济的发展,尤其是盛唐时期对外贸易的不断扩大,数学也不断地进行交流。中国的数学知识和数学教育制度深刻地影响了日本、朝鲜等邻国。它们不仅仿照中国建立了数学教育制度，而且还研习中国的算书。在中外数学交流中，中国和印度的数学(包括历法)交流可以说是最早、最广泛的。两国数学有很多相似之处，个别地方甚至完全一样。有趣的是，其相似之处，就

时间而论，印度一般晚于中国。我们认为中印数学必然存在着师承关系，这个问题很值得进一步探讨。

最后需要特别指出的是：在正确认识与评价中国古代数学成就时，只有把它们和同时代的欧洲及世界其他地方的数学成就相比较，才能看到它们的适当位置。由于欧洲把希腊的许多数学都忘掉了，所以从 3 世纪到 10 世纪，只有印度的数学，部分能和中国数学媲美。

第二编

南北朝传世算书

第一章 《孙子算经》

第一节 概 述

《孙子算经》共三卷，作者名字和编纂年代不详。清初朱彝尊《孙子算经跋》认为它出于战国初期写《孙子兵法》的孙武。阮元《畴人传》因此列“孙子”为周代。戴震《四库全书提要》则根据《孙子算经》中载有“今有长安、洛阳相去九百里”、“今有佛书二十九章”，断定它决非孙武所著。因为“长安”是汉初才有的地名；而“佛书”一词在中国产生于东汉以后。《隋书·律历志》称：“《孙子算术》云：蚕所生吐丝为忽，十忽为秒，十秒为毫，十毫为厘，十厘为分。”这不仅将《孙子算经》称为《孙子算术》，而且与今传本《孙子算经》在内容上有出入；同时，《孙子算经》中前后所载大数的进位法亦不一致。足证《孙子算经》原著又有经后人窜改附益之处。

《张邱建算经·序》记有：“其夏侯阳之‘方仓’，孙子之‘荡杯’”。而传本《夏侯阳算经·序》又称：“五曹、孙子述作滋多。”可证《孙子算经》是隋代以前的作品，并且较《张邱建算经》、《夏侯阳算经》为早。考察《孙子算经》所涉及的社会内容，诸如

田亩制度、兵役制度、度量衡制度等皆为秦汉以后所设，此书卷下又有“户输绵二斤八两”之调法，还编有“棋局十九道”之题（按“户调”制乃晋武帝时开始实行，沿用到唐代。三国时吴邯郸淳《艺经》尚称围棋十九道）。从这些史料来推测，《孙子算经》的编纂年代大约在公元四五世纪。

《孙子算经》是一部启蒙算书，以其浅显易懂而广为人知。卷上首次叙述了算筹记数的纵横布列法和整数的乘除法则；卷中说明筹算分数的算法和筹算开平方法。这些不仅在当时达到了普及数学教育的目的，而且对我们考证古代的算术也提供了宝贵的资料。卷中、卷下还编选了一些关于民生日用的应用问题，题型多与《九章》类似，而学术水平不及《九章》。

卷下选取了几个比较难解的算术问题，并给出了巧妙的解法，例如第 17 题“今有妇人河上荡杯”、第 26 题“今有物不知数”、第 31 题“今有鸡兔同笼”等等。这些问题又经后来的数学书辗转援引，得到了广泛的流传。“物不知数”一题是我国古算书中目前已知的关于一次同余式组的最早记载，《孙子算经》给出了一个巧妙的解法，并易于推广到一般情况。这是《孙子算经》最为后人津津乐道之处。

《孙子算经》也有其不足之处。为增加读者的兴趣，作者有时将解题方法隐藏起来，这对后学者多有不利。书中编造了一些不合实际的题目，如卷下第 36 题为推算孕妇生男生女问题，毫无科学依据，明朝程大位《算法统宗》收录了此题，以致谬种流传。卷下第 27 题称“今有兽六首四足，禽四首二足”纯属无稽之谈。卷下第 22 题答曰：“鹑一千八百万，鸮一亿八千万”，应为“鹑一千八百万，鸮十八亿”，这是本书仅有的一例错解。

第二节 度量衡制度

《孙子算经》首次并十分详细地记载了度量衡的制度，这在其它算书中是很少见的，它为我们研究那个时代的度量衡提供了依据。

（一）度量衡的标准

建立物理量的自然基准，是现代计量科学研究的主要课题，我国古代已积累了不少这方面的知识。卷上称："度之所起，起于忽。欲知其忽，蚕吐丝为忽。……称之所起，起于黍。……量之所起，起于粟。"即用丝、黍、粟作为确定度量衡的依据。这种用数理统计原理确定单位大小的方法，在当时是先进的。从历史上看，两晋、南北朝时期，因政权分散而且更迭频繁，度量衡制度十分混乱，究其原因是度量衡的标准不一。

（二）度量衡的单位值

卷上称："十忽为一丝，十丝为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈，十丈为一引。五十尺为一端，四十尺为一匹。六尺为一步。二百四十步为一亩。三百步为一里。"这里将长度度量的各种关系讲得已十分清楚了。由于《孙子算经》约成书于晋代，《隋书·律历志》称："晋泰始十年荀勖律尺，为晋前尺。"所以，《孙子算经》中尺的大小与王莽铜斛尺同长，一尺折合今日 23.1 厘米。

卷上又称："十黍为一絫，十絫为一铢，二十四铢为一两，十六两为一斤，三十斤为一钧，四钧为一石。"这就给出了衡量轻重的单位关系。可知，《孙子算经》以 2 400 黍为一两。据《汉书·律历志》载："一龠千二百黍，重十二铢，两为两。"也是 2 400 黍为一两。因此，《孙子算经》所述衡制与汉代相同。

卷上还记述了量，即计量多少的工具的大小关系："六粟为一

圭，十圭为一撮，十撮为一抄，十抄为一勺，十勺为一合，十合为一升，十升为一斗，十斗为一斛。”

第三节　算筹与筹算

在《孙子算经》之前，我国就一直用算筹进行计算，对算筹的记数法和筹算法却没有记载。而《孙子算经》则作了详细阐述，这是十分宝贵的史料，我们分析如下：

一　算筹的纵横布列法

“凡算之法，先识其位。一从(纵)十横，百立千僵，千十相望，万百相当。”即用算筹表示自然数时，各位数上的筹码：个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，依次类推，交替使用纵横两式。这样纵横相间，易于辨认。当自然数的某一位为零时，则用空位即“空绝者”来表示。一般情况下用几根算筹表示几，满五以上(不包括五)，则以一当五，即“六不积，五不只”。后来《夏侯阳算经》更明确地表述为：“满六以上，五在上方，六不积算，五不单张。”这样，就把一至九个筹码的表示法说得十分清楚了。

二　十进位值制

在讲乘法法则时，《孙子算经》称：“言十即过，不满自如”，这就是我们今天所说的“满十进一”，是十进制的明确表述。在算筹的纵横布列法中，又提出了“位”的重要性：“凡算之法，先识其位”，即一、十、百、千、万等是不同位上数的单位值：第一位 10^0，第二位 10^1，第三位 10^2，……。亦即任一自然数都可写成 $a_na_{n-1}\cdots a_1a_0$ 的形式，其中 a_i 表示的值为 $a_i\times10^i(a_i\in\{0,1,2,\cdots,9\})$，这正是十进位值制。

三　筹算的乘除法则

“凡乘之法，重置其位。上下相观，上位有十步至十，有百步至百，有千步至千。以上命下，所得之数列于中位。言十即过，不满自如。上位乘讫者先去之。下位乘讫者则俱退之。六不积，五不只。上下相乘，至尽则已。”

乘法分三层：上位、中位和下位，相当于被乘数、积和乘数。先由乘数的最高一位去乘被乘数，乘完后去掉这位的算筹，再用乘数的次高位数去乘。两次之积的对应位上的数相加，乘完为止。其计算层次很清楚，把多位数乘多位数变为用单位数去乘多位数，乘一位加一位。基本思想和现在的笔算法完全一样，所不同的是一用笔一用筹，再有就是使用乘数的次序两者相反。

“凡除之法，与乘正异。乘得在中央，除得在上方。假令六为法，百为实。以六除百，当进之二等，令在正百下，以六除一，则法多而实少，不可除，故当退就十位。以法除实，言一六而折百为四十，故可除。若实多法少，自当百之，不当复退。故或步法十者置于十位，百者置于百位。上位有空绝者，法退二位。余法皆如乘时，实有余者，以法命之，以法为母，实余为子。”

除法也分三层：上位是商，中位是被除数(叫做实)，下位是除数(叫做法)。除数摆到被除数够除的那一位之下，除完向右移动。如果除不尽，就摆在那里，呈带分数形式。

第四节　开方与开平方

卷中第 19 和第 20 题是开平方问题，其开方法与《九章算术》基本一致，但又有不同。我们以第 19 题“今有积二十三万四千五百六十七步，问为方几何?”为例阐述其演算步骤：

(1)“置积二十三万四千五百六十七步为实。次借一算为下

法，步之，超一位，至百而止。”

将“借一算”命名为“下法”，且“至百而止”，这是与《九章算术》不相同的。用现代数学语言来说：欲解 $x^2=234\ 567$，先进行缩根变换，令 $x=100x_1$，则有 $(100x_1)^2=234\ 567$。《孙子算经》称 100 为“借一算”；《九章算术》则称 $100^2=10\ 000$ 为“借一算”。

(2)“商置四百于实之上。副置四万于实之下，下法之上，名为方法。命上商四百除实。”

求得初商 400，进行减根变换，令 $x_1=y+4$，$(100y+400)^2=234\ 567$，得 $(100y)^2+2\times 40\ 000y=74\ 567$，称 40 000 为方法。这里比《九章算术》要详细。

(3)“除讫，倍方法。方法一退，下法再退。”

扩根变换与《九章算术》相同，令 $10y=y_1$，$(10y_1)^2+8\ 000y_1=74\ 567$。

(4)“复置上商八十，以次前商。副置八百于方法之下，下法之上，名为廉法。方、廉各命上商八十，以除实。”

进行减根变换，比《九章算术》详细，且有了新的命名“廉法”。令 $y_1=y_1'+8$，$(10y_1'+80)^2+8\ 000\times(y_1'+8)=74\ 567$，$(10y_1')^2+9\ 600y_1'=4\ 167$。

(5)“除讫，倍廉法上从方法。方法一退，下法再退。”缩根变换，同《九章算术》。令 $10y_1'=y_2$，$y_2^2+960y_2=4\ 167$。

(6)“复置上商四，以次前。副置四于方法之下，下法之上，名曰隅法。方、廉、隅各命上商四以除实。”

减根变换，令 $y_2=y_2'+4$，$(y_2'+4)^2+960(y_2'+4)=311$。

对每一步的一次项系数都给予不同的名称，共六层(《九章算术》为四层)。表述方便，条理更加清晰。

(7)“除讫，倍隅法从方法。上商得四百八十四，下法得九百六十八，不尽三百一十一。是为方四百八十四步、九百六十八分步之三百一十一。”

用 $484\frac{311}{968}$ 表示 234 567 的平方根，即《刘徽注》中所称“不加借算而命分”。

第五节 孙子定理（中国剩余定理）

卷下第 26 题是有名的“物不知数”题：

“今有物，不知其数。三、三数之，剩二；五、五数之，剩三；七、七数之，剩二。问物几何？”

“答曰：二十三。”

这是一个一次同余式组问题，设 x 为所求之数，就是

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3, \\ x \equiv 3 \pmod 5, \\ x \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

《孙子算经》给出的解法，使人们初步窥见古代解一次同余式组的大体过程：

“三、三数之剩二，置一百四十；五、五数之剩三，置六十三；七、七数之剩二，置三十。并之，得二百三十三。以二百一十减之，即得。凡三、三数之剩一，则置七十；五、五数之剩一，则置二十一；七、七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之，即得。”

这个解法分两部分，第一部分属于本题，即

$N=70\times2+21\times3+15\times2-105\times2=23$。

第二部分则给出了这一类一次同余式组

$$\begin{cases} x \equiv R_1 \pmod 3, \\ x \equiv R_2 \pmod 5, \\ x \equiv R_3 \pmod 7, \end{cases}$$

的一般解法：

$N=70R_1+21R_2+15R_3-105P$。

其中 P 为非负整数，且使 N 大于零小于或等于 105。

术文虽然简略，没有说明解法的原理。但是，这个解的构造十分明显，可以类推到一般的情形。在《孙子算经》成书时代，我国的历算家已经掌握了按一定程序来计算一次同余式的解的方法。《孙子算经》以数学游戏的形式记叙它，正是这一算法普及于民间的具体表现。

"物不知数"题引起了后世的极大兴趣。人们知道解题的关键是找三个与 1 同余的乘积，所以好多人为之作诗歌以助记忆。宋人周密(1232～1298 年)《志雅堂杂钞》卷下有"鬼谷算"条，除了抄录"物不知数"原题外，对术文中那四个剩余作隐语诗道：

三岁孩儿七十稀，五留廿一事尤奇。

七度上元重相会，寒食清明便可知。

明代程大位《算法统宗》卷五录有"物不知数"题，术文也用诗歌写出：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝。

七子团圆正月半，除百零五便得知。

诗里对四个数据不绕弯道，和盘托出。

第六节　其它重要创见

一　取材新颖，结构严谨

《孙子算经》以前的算书，都是以问题集成的形式，按问题的类型或解法划分章节，阐述数学的内容与方法；后人又用作注的形式推进其理，这两种做法都有很大的局限性。《孙子算经》作为一部启蒙算书没有拘泥前人，而是根据自身的教育目的和对象安排内容，颇有新意。卷上先讲述了度量衡制度、大数记法、常

见物质的比重、算筹记数法、筹算乘除法则(含加减法)、各种粟、米或饭的对换比例等，为初学者作好了充分的准备，然后让读者练习自然数的乘除运算，这是最基本的运算。卷中由自然数的四则运算扩展到正分数的四则运算，并给出了几道简单的应用题。卷下则是比较复杂的应用题。可见，作者在内容安排上依据了由易到难、由简单到复杂的原则，逻辑结构十分严密。这对今天的数学教育很有借鉴意义。

二 解题巧妙，流传广远

《孙子算经》的学术水平虽不及《九章算术》，但许多题目的解法却别出心裁，为后世学者广为传诵。现分析如下：

卷下第17题：“今有妇人河上荡杯。津吏问曰：‘杯何以多？’妇人曰：‘家有客。’津吏曰：‘客几何？’妇人曰：‘二人共饭，三人共羹，四人共肉，凡用杯六十五，不知客几何？’答曰：六十。”

其解法是：先求出客人与杯的比例$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$，再求出客人数$65\div\frac{13}{12}=60$(人)。为增加读者的兴趣，孙子隐藏了$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$这一过程。《张邱建算经》卷下第37题即为此题。

卷下第18题：“今有木，不知长短。引绳度之，余绳四尺五寸。屈绳量之，不足一尺。问：木长几何？答曰：六尺五寸。”

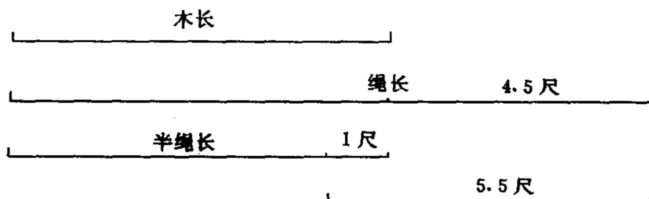


图 2.1.1 测木长短

如图 2.1.1 半绳长为(1+4.5)尺=5.5 尺，绳长为 5.5 尺×2=11 尺，从而木长为 11 尺-4.5 尺=6.5 尺。不必列方程，十分简便。《张邱建算经》卷下第 15 题与此题解法相似。

卷下第 19 题："今有器中米，不知其数。前人取半，中人三分取一，后人四分取一，余米一斗五升。问：本米几何？答曰：六斗。"

剩余的米为 1.5 斗，占原来的$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$，故原来的米为：

$$1.5\div\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=1.5\times2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=6(\text{斗})。$$

《张邱建算经》卷下第 34 题解法与此题相同。

卷下第 24 题："今有方物一束，外围一匝有三十二枚。问：积几何？答曰：八十一枚。"

孙子不是先求该束方物的边长，而是把它看成由一匝一匝方物组成，且相邻两匝之差为 8，最内一匝为 1，从而总数为 32+24+16+8+1=81 枚。

卷下第 31 题："今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足。问鸡、兔各几何？答曰：鸡二十三，兔一十二。"

该题可用方程术，但孙子没有这样做，而是用假设法：若全为鸡（鸡有两条腿），则应有$\frac{96}{2}$头，而实际有 35 头，则多$\left(\frac{96}{2}-35\right)$头，这正好是兔子的头数，因为一只兔子有 4 条腿，是鸡的两倍。从而鸡的头数为 $35-\left(\frac{96}{2}-35\right)$头，这正是术文所表示的：

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A \\ \frac{B}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A \\ \frac{B}{2}-A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A-(\frac{B}{2}-A) \\ \frac{B}{2}-A \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{鸡} \\ \text{兔。} \end{matrix}$$

《张邱建算经》卷中第18题的第二解法与此相同。

卷下第35题:“今有三女,长女五日一归,中女四日一归,少女三日一归。问:三女几何日相会?答曰:六十日。”

该题即为求一个最小正整数a,使$\frac{a}{5}$,$\frac{a}{4}$,$\frac{a}{3}$均为整数。解法如下:

$$\underset{\text{归数}\quad\text{日数}}{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} \xrightarrow{\text{维　乘}} \underset{\text{归数}\quad\text{日数}}{\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 15 & 4 \\ 20 & 3 \end{bmatrix}} \xrightarrow[\text{归　数}]{\text{日数乘}} \underset{\text{归数}\quad\text{日数}}{\begin{bmatrix} 12 & 60 \\ 15 & 60 \\ 20 & 60 \end{bmatrix}}\text{。}$$

从而得到$a=60$,三女分别归12次、15次和20次。《张邱建算经》卷上第10题和第11题的解法,就是这一思想的继承和发展。

第二章　《张邱建算经》

第一节　概　述

《张邱建算经》共三卷，“自序”最后题：“清河张邱建谨序”（据1964年中华书局钱宝琮校点本），不说著书年代。“清河”是张邱建郡望，未必是作者的籍贯。卷中第13题，“今有率，户出绢三匹，依贫富欲以九等出之，令户各差除二丈”，这与《魏书·食货志》所载：“献文帝天安元年(466年)因民贫富为租输三等九品之制”相合。《魏书·食货志》又云：“孝文帝太和九年(485年)颁行均田法，三等九品的户调法就废弃不用。”因此，我们断定它的编写年代是公元466年到485年之间。现传本《张邱建算经》出于南宋刻本，该刻本传到清代的一册有缺页，卷中缺少最后几页，失传的算题不知多少。卷下缺少最前二页，约计少了二三个算题。全书现存92题(包括只存一部分的二个算题)，其中卷上、卷中、卷下分别存32，22，38题。

《张邱建算经》继承了《九章算术》的数学遗产。首先他从《九章算术》中摘取并改编了许多算题，如卷上第12和第13题及卷下第3题，分别与勾股章的第23，6，8题相似；卷上第21，24，29，30题、卷中第17，18题及卷下第22题，又分别与盈不足章的第4，15，18，9，20，13，16题相似；卷中第2，4，16题，还分别与均输章的第13，16，9题相似。可见，它循《九章算术》的轨迹十分明显。其次，凡是《九章算术》讲述过的算法，张邱建不再重复，直接应用。从张邱建“自序”看，他对分数的约分、通

分十分重视，却只字不提分数的四则运算法则。卷上开头有关四则运算的六题，都是直接给出答案，并无术文。对开方术、开立方术及线性方程组的解法等数字计算法，张邱建只说："开方除之"、"开立方除之"、"如方程"，无具体步骤。对应用最广泛的比例算法也是如此。可见他是以《九章算术》为起点，并把其中的有关算法视为已知。

《张邱建算经》又发展了《九章算术》的数学成果。主要有：

(1)张邱建虽从《九章算术》中选编了许多算题，但他决不是照抄照搬，如他把盈不足章原来都用盈不足求解的问题，均依问题本身的性质提出了新的解题方法；他把勾股章有关勾股测量的问题，进行变通，使测量更加简便；

(2)卷上第10和11题提出了最大公约数与最小公倍数的关系，并提供了求解的算法程序；

(3)卷中第20题和卷下第9题将勾股章中的开带从平方问题进一步推广应用；

(4)完善了等差数列理论，将等差数列的通项公式、求和公式进行变通应用；

(5)卷下最后一题是有名的"百鸡问题"，发展了方程章"五家共井"问题，开创了不定方程研究的先例。

不足之处是：《张邱建算经》的术文有过于简便之处，幸而后来有刘孝孙(约6世纪中叶)的细草，使我们可以了解到当时的一些通行算法。张邱建所用公式及常数，为图方便而不求精确与严格，使唐李淳风等依据《九章算术》为之作注10处。卷上第19题：已知圆径二尺一寸，求内接正方形的边长，张邱建用"方五斜七"计算，得方边长一尺五寸。李淳风等给出较准确的值：一尺四寸二十五分寸之二十一。卷上第20题，张邱建认为径一寸的弹丸体积为十六分寸之九，李淳风等认为应是二十一分寸之十一，补立"依密率术"和"依密率草"于刘孝孙细草之后，显见张邱建

的计算公式是粗疏的。

第二节　四则运算

这里的四则运算是指分数的四则运算，也包括整数。

一　分数的定义

《张邱建算经序》称："上实有余为分子，下法从而为分母，可约者约以命之，不可约者因以名之。"即张邱建认为，分数产生于整数的除法，是整数的自然发展与扩充，当除之不尽时，用分数表示，余数为分子，除数为分母。并指出分数的表示形式：分子在上，分母在下。当分子、分母有公约数时，就先同时约掉公因子，再定义分数。即对分数a/b，要求$(a,b)=1$，a，$b\in \mathbf{N}_+$。① 在具体运算过程中，张邱建又根据需要将分数或写成左右结构（如卷上第6题）或写成上下结构，这反映了他对分数基本性质的深刻认识，为分数的各种运算的顺利进行创造了条件。这些思想与刘徽所述："凡实不满法者而有母子之名"，"虽则粗细有殊，然其实一也"是一致的。张邱建认为："通分母入者，出之则定。"即要将运算结果为假分数的，化为带分数。由以上我们看到，张邱建已提出了最简分数的定义与要求：

$$\frac{a}{b},\ (a,b)=1,\ b>a,\ a,\ b\in \mathbf{N}_+。$$

这与我们现在所述最简分数的定义及对运算结果的要求是一致的。这些思想是继承了《夏侯阳算经》所述：对于分数应先进行约分，"于此不得，乃为之命分。分母入者须出之，然后而定"的思想。也与《九章算术》之后中算学的思想是相通的。

---

① 本书中$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$\mathbf{N}^*(\mathbf{N}_+)=\{1,2,3,\cdots\}$。

二 分数的约分与通分

《张邱建算经序》称："凡约法，高者下之，偶者半之，奇者商之。副置其子及其母，以少减多，求等数而用之。"即若分子分母都为10倍的数，则先退位约之；若均为偶数，则先以2约之；若均为奇数，则可用小的奇因子(如3,5,7等)试约；一般地，用更相减损术，求等数约之。张邱建对运算后的结果，都约为最简分数(唯一例外的是卷下第20题所得答为:"甲得二千五百六十三钱四分之二,…丁得三千八百四十五钱四分钱之二,"这里的2/4未约为最简分数,这不能不说是张邱建的一个小小失误)。张邱建对约分十分灵活与熟练，尤其对分子分母末位分别为0与5或均为5的分数，如卷中第16题有关约分为135/720，先分子分母同乘以2，则均为10的倍数，用退位约分可化为较简单的形式27/144,然后用试约或更相减损易得3/16。这种算法继承了《夏侯阳算经》中所述："位高者下之，可约者约之，偶则半之，五则倍而折之。一、三、七、九，商用所宜"的思想，实为其后南宋杨辉《田亩比类乘除捷法》中所述乘除简便算法的滥觞。张邱建的约分术又是《九章算术·方田》所述约分术的继承与发展。

对于通分，张邱建则称："乃若其通分之法，先以其母乘其全，然后内子。母不同者母互乘子，母亦相乘为一母，诸子共之约之。通分而母入者，出之则定。"即分数的加减运算，先将带分数化为假分数。分母相同，分子可以直接相加减；分母不同者，用诸分数分母的积作为公分母。这与《九章算术·方田》合分术是相同的。张邱建处理有关通分问题，诸分数的分母多是两两互素的，所以看不出他是否有用诸分母的最小公倍数作公分母的意识。从卷中第14题刘孝孙的细草看，有$\frac{2}{3}+\frac{25}{27}=\frac{54}{81}+\frac{75}{81}=\frac{129}{81}=\frac{43}{27}$，刘孝孙也用两分母之积。卷下第37题收录了《孙子算经》中的"妇人

荡杯”题，要做加法：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$，张邱建的作法为：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12}{24}+\frac{8}{24}+\frac{6}{24}=\frac{26}{24}$，仍用诸分母的乘积。仅从以上诸题，还没有发现张邱建利用最小公倍数作公分母的迹象。

三　分数的四则运算

该书没有单独的题目讲述分数的加减法则，却都体现在混合运算的通分问题上。它是将《九章算术》加减法则直接应用，无具体说明。足见人们对这些法则的熟练程度。书中给出了不少有关带分数乘除法的算题。如卷上第2题相当于求$21\frac{3}{7}\times 37\frac{5}{9}$，刘孝孙的细草是先将带分数化为假分数，再把分子、分母分别相乘，并将最后结果约简。卷上第5题相当于求$1768\frac{4}{7}\div 27\frac{3}{5}$，细草的法则是先将带分数化为假分数，再把除数的分子与分母颠倒，化为乘法运算。分数的除法在《九章算术》中已经使用过，《张邱建算经》说得更明确。这种算法与我们今天一直使用的方法完全一样。从该书所给算题看，在公元四、五世纪，人们不仅对单独的分数四则运算，而且对它们的混合运算已经熟练掌握，尤其对先括号，再乘除，后加减的运算次序十分明晰。如卷上第7题相当于求$152333\frac{1}{3}\div\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{5}+\frac{9}{7}\right)$，其方法是先按分数加法法则计算括号中的$\frac{5}{3}+\frac{7}{5}+\frac{9}{7}=\frac{457}{105}$，再按除法法则求$152333\frac{1}{3}\div\frac{457}{105}=\frac{457\,000}{3}\times\frac{105}{457}=35\,000$。再如卷中第16题相当于求$5\times 37\frac{11}{16}\div\left(7-37\frac{11}{16}\times 5\div 45\right)$，对这样一个复杂的混合运算，张邱建也按正确的法则，求出了正确的答案。该书包含了各种各样的四则运算问题，为小学数学提供了丰富的题源。

第三节 开方与开立方

一 开平方与开立方

卷中第19题至21题论述开平方问题。第19题为完全平方数的平方，相当于求解$x^2=127\ 449$，术文仅称："以开方除之，即得。"无具体步骤，术后有刘孝孙的细草，继承了《九章算术》的开方程序。所不同的是《九章算术》筹算图式从上到下摆成四层：议得、实、法、借算；而《张邱建算经》则与《孙子算经》一样，从上到下摆成五层：商、积步、隅法、方法、下法(借算)，运算的中间结果更加清晰。

第20和21题是非完全平方数的开方问题，分别得出结果：

$$\sqrt{175\ 692}\approx 419\frac{131}{839},\ \sqrt{13\ 068}\approx 114\frac{72}{229}。$$

相当于设A为非完全平方数，且$A-a^2=r$，其中$a^2<A<(a+1)^2$，则$\sqrt{A}\approx a+\frac{r}{2a+1}$($a$的求得与第19题开方程序同)。这正是《九章算术》少广章开方术刘徽注："术或有以借算加定法而命分"的不足近似值。

卷下第30，31，32题论述开立方术。该三题均相当于解方程$x^3=A$，其中$A\in \mathbf{N}_+$且为非完全立方数。在求$\sqrt[3]{A}$的整数部分a时，从刘孝孙细草看与《九章算术》开立方术一致，并且从上到下列为六行。不同的是各行的名称由原来的：商、实、法、中行、下行、借算，改为：商、积步、方法、廉法、隅法、下法，更突出了开方术的原始解法——几何代数法。对于$\sqrt[3]{A}$的小数部分b，若设$r=A-a^3$，应有$\frac{r}{3a^2+3a+1}<b<\frac{r}{3a^2}$，张邱建取$b\approx\frac{r}{3a^2+1}$，比《九章算术》少广章开立方术刘徽注"术亦有以定法而命分

者”略小。

二　开带从平方

卷中第22题为：

“今有弧田，弦六十八步、五分步之三，为田二亩三十四步、四十五分步之三十二。问：矢几何？”

“答曰：矢一十二步、三分步之二。”

“术曰：置田积步，倍之为实。以弦步数为从……”

下文原书缺脱，沈康身补足缺文：“法、开方除之，即得矢。”[1]该题利用了《九章算术》方田章弓形面积公式 $A_{弓}=\frac{1}{2}(bh+h^2)$，按题设代入数据即得：$h^2+68\frac{3}{5}h=1\ 029\frac{19}{45}$。这不仅与《九章算术》勾股章第20题“今有邑不知大小”造术相同，而且由原来的整系数变为分数系数，也就是说在公元四、五世纪，我国已经出现了形如 $x^2+ax=c\ (a>0,c>0)$ 的分数系数的二次方程。

卷下第9题也为开带从平方问题，相当于解 $x^2+15x=594$。刘孝孙的细草先是演示了一次项系数及常数项的由来，然后只说“开方，合前问”，无具体步骤。由此可以看出，当时人们重在列方程，至于求解只视为开方术的某一个环节。其后，唐代王孝通的《缉古算经》对于三次方程也是如此，足见当时人们对开方术的深刻认识与熟练程度。开带从平方法的继续与发展，导致了宋、元时期一元高次方程的一般数值解法。

第四节　比　　例

《张邱建算经》中包含了各种比例关系，有关比例的内容约占

---

① 沈康身．中算导论．上海：上海教育出版社，1986．184

全书的 1/3 以上。

一 正比例(今有术)

卷上第 8，9，28，30 题，卷中第 2，5，6，14 题，卷下第 19，26 题均属此类。《九章算术》粟米章已给出算法：所求数＝所有数×所求率/所有率，刘徽用率——一组线性相关的量(或数)来解释，认为今有术是“都术”，“凡九数以为篇名，可以广施诸率”。从《张邱建算经》的内容看，对率是十分清楚并熟练应用的。如卷下第 19 题是其率术：

“今有差丁夫五百人，合共重车一百一十三乘。问各共重几何？”

“术曰：置人数为实，车数为法而一，得四人共重。又置一于上方命之。实余返减法讫，以四加上方一，得五人共重。法余即四人共重车数，实余即五人共重车数。”

由今有术：500 为所有数，113 为所有率，1 为所求率得：所求数$=500\times1/113=4\frac{48}{113}$。又 113－48＝65，故 48 乘，乘各 5 人；65 乘，乘各 4 人。这与《九章》粟米章其率术所言“置所买……以为法，以所率乘钱数为实，实如法而一。不满法者反以实减法，法贱实贵”是一脉相承的。

二 反 比 例

即两个相关量 a，b，在同一范围内若 a(或 b)扩大(或缩小)若干倍时，则 b(或 a)反而缩小(或扩大)相同的倍数。《九章算术》均输章第 8 题给出一例，《张邱建算经》卷上第 31 题，卷下第 33 题又给出二例。其基本题型为：

今有 A 个人干某事，B 日完成。若有 C 人(或用 D 日完成)，问多少日完成(或人数几何)？

求解结果为 $AB/C(D)$。

三　复　比　例

两个或两个以上的比如：$a_i : b_i (i=1,2,\cdots,n)$，把诸前项之积 $\prod_{i=1}^{n} a_i$ 作为前项，诸后项之积 $\prod_{i=1}^{n} b_i$ 作为后项，就叫复比例。它是相对简单比例而言。卷下第 16，23，27，28，29，35 题均为此类。如卷下第 16 题：

“今有车五乘，行道三十里，雇钱一百四十五。今有车二十六乘，雇钱三千九百五十四、四十五分钱之十四。问：行道几何？”

由题意

$$\left.\begin{matrix}5:26\\30:x\end{matrix}\right\}=145:3954\frac{14}{45}，其中 x 为行道。$$

故 $5\times30:26x=145:3\,954\frac{14}{45}$。即：$x=5\times30\times3\,954\frac{14}{45}\Big/(26\times145)$，合术文。

这与《九章》均输章第 7 题以及衰分章第 20 题相似，解法也一致。

四　连　比　例

当比较几个同类量的关系时，以其中一个量为单位来度量其它几个量，则称这几个量的比例关系为连比例。卷上第 25，26，27 题，卷下第 17，18 题都为此类。如卷上第 25 题：

“今有生丝一斤，练之折五两。练丝一斤，染之出三两。今有生丝五十六斤八两、七分两之四。问：染得几何？答数：46 斤 $2\frac{223}{448}$ 两。术曰：置一斤两数，以折两数减之，余乘今有丝斤两之数。又以出两数并一斤两数乘之为实。一斤两数自乘为法。实如法得一两数。”

即生丝：练丝＝16：11，练丝：染丝＝16：19.

由齐同术，生丝：染丝＝16^2：11×19。

由今有术，染丝＝$\left(56\times16+8\frac{4}{7}\right)\times\frac{11\times19}{16^2}$。

这正是《九章算术》齐同术及今有术的应用。

五　分配比例

它是将一个数按一定比例 $p_1:p_2:\cdots:p_n$ 分成 n 份。卷上第17题，卷中第13题，卷下第20、21题均为此类。如卷下第20题：

“今有甲持钱二十，乙持钱五十，丙持钱四十，丁持钱三十，戊持钱六十，凡五人合本治生，得利二万五千六百三十五。欲以本钱多少分之。问：各人得几何？”

“术曰：各列置本持钱数，副并为法。以利钱乘未并者，各自为实，实如法得一。”

“本持钱数”即 p_i，副并即 $\sum_{i=1}^{n}p_i(=p)$，利钱即 A，未并者即 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$。这正是刘徽的比例理论：$(p_1,p_2,\cdots,p_n,p)$是一组率，同乘以 A 除以 p 即得：$(Ap_1/p,Ap_2/p,\cdots,Ap_n/p,A)$。

第五节　数　　列

卷上第18，22，23，32题，卷中第1，3题，卷下第24，36题都涉及数列问题。由这些算题及术文可知张邱建对等差数列的下列关系是有深刻认识的：

$$a_n=a_1+(n-1)d,\ S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times d;$$

对等比数列也有涉及。他相当于做了如下工作：

一　等差数列

(一)直接应用

卷上第23题：

“今有女子不善织，日减功迟。初日织五尺，末日织一尺，今三十日织讫。问织几何?”

用现代数学语言来说，即：已知a_1，a_n，n，求S_n。术文得出$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$。卷下第24，36题：已知a_1，d，n，求S_n。术文先求出$a_n=a_1+(n-1)d$，然后给出$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$。在已知a_1，a_n，n，d为四个量中的任何三个求S_n的问题，共有4种情况，张邱建给出两种，其它两种可由公式$a_n=a_1+(n-1)d$转化为所给形式。

(二)反求

卷上第22题：

“今有女善织，日益功疾。初日织五尺，今一月，日织九匹三丈。问日益几何?”

即：已知a_1，n，S_n，求递增数列的公差d。术文给出$d=(\frac{2S_n}{n}-2a_1)/(n-1)$。卷上第32题，卷中第1题：已知$a_1$，$d$，$S_n/n$，求$n$。术文给出$n=2(\frac{S_n}{n}-a_1)/d+1$。这两个算题都是公式$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$的反求。

(三)较复杂的等差数列问题的求解

卷上第18题：

“今有十等人甲等十人，官赐金依等次差降之。上三人先入，得金四斤，持出。下四人后入，得金三斤，持出。中央三人未到者，亦依等次更给。问各得金几何?及未到三人复应得金几何?”

即：在递减数列中，已知$\sum_{i=1}^{n_1} a_i=A$，$\sum_{i=0}^{n_2-1} a_{n-i}=B$，$n_1$，$n_2$，$n$，求$a_i(i=1,2,\cdots,n)$。术文给出

“以先入人数分所持金数为上率。以后入人数分所持金数为下率。二率相减，余为差实。并先后入人数而半之，以减凡人数，余为差法。实如法而一，得差数。并一、二、三，以差数乘之，以减后入人所持金数，余，以后入人数而一。又置十人减一，余，乘差数，并之即第一人所得金数。以次每减差数，各得之矣。并中央未到三人，得应持金数。”

即：

$$d=\left(\frac{A}{n_1}-\frac{B}{n_2}\right)/\left(n-\frac{n_1+n_2}{2}\right),$$

$$a_n=\left(B-d\sum_{i=1}^{n_2-1} i\right)/n_2,$$

$$a_i=a_n+(n-i)d,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n。$$

后两个结果易于理解，第一个结果如何求得？

由题意：

$$\begin{cases} a_n+d\sum_{i=1}^{n_1}(n-i)/n_1=\dfrac{A}{n_1}, & (1)\\ a_n+d\sum_{i=0}^{n_2-1} i/n_2=\dfrac{B}{n_2}。 & (2)\end{cases}$$

(1)－(2)得

$$d=\left(\frac{A}{n_1}-\frac{B}{n_2}\right)/\left(\sum_{i=1}^{n_1}(n-i)/n_1-\sum_{i=0}^{n_2-1} i/n_2\right)。\quad(3)$$

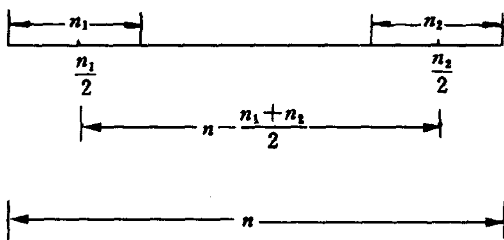


图 2. 2. 1　依等分金

由以上图式知$\sum_{i=1}^{n_1}(n-i)/n_1-\sum_{i=0}^{n_2-1}i/n_2=n-\frac{n_1+n_2}{2}$。对于如此复杂的数列，张邱建能正确求解，实在不易。

以上问题和解法说明，至迟在5世纪，中国传统数学已经具备了系统的等差数列理论。

二　等 比 数 列

卷中第3题相当于：已知n，S_n，q，求$a_i(i=1,2,\cdots,n)$。术文给出：$a_i=S_nq^{i-1}\sum_{j=0}^{n-1}q^j$，$(i=1,2,\cdots,n)$这相当于将公式$S_n=a_1\sum_{j=0}^{n-1}q^j$中的$a_1$代入公式$a_i=a_1q^{i-1}$而得。

《九章算术》衰分章遇到了等差数列：1，2，3，4，5(第1题)，等比数列4，2，1(第2题)和1，2，4，8，16(第4题)，但没有按数列处理。均输章第17题相当于：已知a_n，a_1，n，求等差数列的每一项。刘徽的注释给出了公式$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$，但仍按衰分术求$a_i(i=2,3,\cdots,n-1)$；第18题：已知S_n，n，且$\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=k+1}^{n}a_i$，求$a_i(i=1,2,\cdots,n)$，也是用衰分术。盈不足章第10题：已知两等差数列的首项与公差分别为a_1，d，b_1，d'，求n，使$S=S_n+S_n'$，

其中 $a_1>b_1$，$0<q<1$，$q'>1$；该三题均以盈不足术求解。值得注意的是刘徽在给盈不足章第 19 题作注时，正确地提出了等差数列的通项公式

$$a_i=a_1+(i-1)d\ (i=1,2,\cdots,n)$$

及求和公式：$S_n=(a_1+\frac{(n-1)d}{2})\times n$①，这对张邱建是有启发的。《孙子算经》中也遇到数列问题，卷上第 25 题有 3，6，9，12，15；卷上第 27 题有 1，2，4，8，16；卷下第 24 题有 8，16，24，32；卷下第 34 题有 9，81，729，6 561，59 049，531 441，4 782 969，43 046 721 但均未按数列计算，都是用盈不足术、衰分术等。其方法是可取的，但数列理论失之交臂。张邱建则总结了前人已有的数列知识，并发扬光大，推陈出新，这是他的独到之处。

第六节　"方程"

卷下第 12 至 15 题都是线性方程组问题，它们分别相当于给出了下列方程组及其解答：

$$(12)\begin{cases}3x+2y+z=45,\\2x+3y+z=43,\\x+2y+3z=35。\end{cases}\qquad(13)\begin{cases}x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=79,\\\frac{x}{2}+y+\frac{z}{2}=68,\\\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+z=57。\end{cases}$$

$$(14)\begin{cases}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=100,\\\frac{2}{3}x+y+\frac{1}{2}z=100,\\\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+z=100。\end{cases}\qquad(15)\begin{cases}x+10=6(y-10),\\y+10=x-10。\end{cases}$$

---

① 白尚恕.《九章算术》注释. 北京：科学出版社，1988. 250

张邱建的方法是先将分数系数化为整系数，然后称“如方程”，无具体步骤。从刘孝孙的细草看，其解法同《九章算术》方程术是一样的，如第 14 题的系数矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 100 & 100 & 100 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 300 & 600 & 300 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 900 & 600 & 300 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 3 \\ 2 & 18 & 2 \\ 7 & 9 & 1 \\ 300 & 1\ 800 & 300 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 300 & 600 & 300 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 10 & 2 \\ 70 & 5 & 1 \\ 3\ 000 & 600 & 300 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 2 \\ 60 & 5 & 1 \\ 1\ 800 & 600 & 300 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 30 & 450 & 300 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 30 & 45 & 300 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 180 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 60 \end{pmatrix}。$$

卷下第 15 题：

“今有甲、乙怀钱，各不知其数。甲得乙十钱，多乙余钱五倍。乙得甲十钱，适等。问：甲、乙怀钱各几何？”

“答曰：甲三十八钱，乙十八钱。”

“术曰：以四乘十钱，又以七乘之，五而一。所得，半之，以十钱增之，得甲钱数。以十钱减之，得乙钱数。”

此解法很奇妙，术文较难理解。我们把它分析如下。为方便，

用现代符号表述。

设甲有 x 钱，乙有 y 钱。

由题意，有
$$\begin{cases} x+10=6(y-10), & (1) \\ y+10=x-10。 & (2) \end{cases}$$

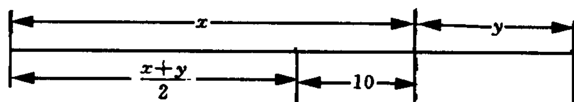


图 2.2.2　术文示意

由图 2.2.2 可知：$x=\frac{x+y}{2}+10$，$y=\frac{x+y}{2}-10$。只要求得 $x+y$ 即可。

由(1)，(2)有

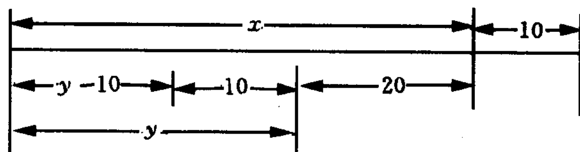


图 2.2.3　术文示意

$$5(y-10)=(x+10)-(y-10)=40。$$

又由图 2.2.3 知：

$$x+y=(x+10)+(y-10)=6(y-10)+(y-10)=7(y-10),$$
$$5(x+y)=5\times7(y-10)=7\times5(y-10)=7\times40=280,$$

故 $x+y=\frac{280}{5}=56$。　所以

$$x=\frac{x+y}{2}+10=\frac{56}{2}+10=38,$$

$$y=\frac{x+y}{2}-10=\frac{56}{2}-10=18。$$

用这样的方法，原方程组不进行移项，也可求解。

第七节　百鸡问题

卷下第38题是有名的“百钱百鸡”题：

“今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三值钱一。凡百钱，买鸡百只。问：鸡翁、母、雏各几何？”

“答曰：鸡翁四，值钱二十；鸡母十八，值钱五十四；鸡雏七十八，值钱二十六。”

“又答：鸡翁八，值钱四十；鸡母十一，值钱三十三；鸡雏八十一，值钱二十七。”

“又答：鸡翁十二，值钱六十；鸡母四，值钱十二；鸡雏八十四，值钱二十八。”

术文只有“鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得”十七字，又缺少刘孝孙的细草，读者很难体会这一问题的真正解法。宋元丰七年秘书省刻书时，添人了算学教授谢察微拟立的术草，但这一解题方法及答数仅为偶合，显然是不合理的。近人钱宝琮先生认为：“术文似非全豹，考其意，不过谓每鸡母七，可当鸡翁四、鸡雏三也，鸡数相等，鸡值亦相当也。盖鸡翁雏增减之数，与鸡母损益之数相与之比为四、三、七。义理与‘五家共井’题同。”[①] 见解可谓深刻！事实上，“百钱百鸡”题同《九章算术》“五家共井”题一样，都是依线性方程组的消元法求解的。

用现代数学语言来表述，设鸡翁、母、雏个数分别为 x，y，z，由题意：

$$\begin{cases}5x+3y+\frac{1}{3}z=100, & (1)\\ x+y+z=100。 & (2)\end{cases}$$

① 钱宝琮. 百鸡术源流考. 上海：学艺出版社，1921

(1)两边同乘以 3 减去(2)两边同乘以 9 得：

$$8z-6x=600。$$

两边同除以 2，

$$4z-3x=300。$$

即

$$4z=3(100+x)。 \tag{3}$$

由(3)可知，z 是 3 的倍数(考虑到实际问题 z 只能取 3,6,9 …)，x 是 4 的倍数(x 只能取 4,8,16,…)。这样当 z 每增 3 时，相当于(3)式两边同加上 12，即 x 增 4。也就是说，z 与 x 是同增同减的，且依 3∶4 变化。另一方面，z 增 3 则 x 增 4 时，鸡的总个数增加 7，而钱数增加 $3\times\frac{1}{3}+4\times5=21$ 钱，这恰是 7 只母鸡的钱数，故得 $x:y:z=4:(-7):3$。由试验得知，当 x_0 取初值 4 时，代入(3)(2)得 $z_0=78$，$y_0=18$，从而得一组初值 $(x_0,y_0,z_0)=(4,18,78)$，依上述规律，就有通解：

$$\begin{cases}x=4+4t,\\ y=18-7t,\quad t\in\mathbf{Z}。\\ z=78+3t,\end{cases}$$

求其正整数解，只需取 $t=0$，1，2 即可，这正是术文与答。

“百钱百鸡”题开创了中国古代不定方程研究之先河，其影响一直持续到 19 世纪。

第八节　其它创见

一　分数的最小公倍数与算法程序化

卷上第 10 题相当于：已知三人，每人环山一周所需天数分别是 $\frac{325}{150}$，$\frac{325}{120}$，$\frac{325}{90}$，求一个最小的既约分数 $\frac{a}{b}$，使得 $\frac{150a}{325b}$，$\frac{120a}{325b}$，

$\frac{90a}{325b}$均为整数。张邱建的解答为：

$$\frac{a}{b}=\left[\frac{325}{150},\ \frac{325}{120},\ \frac{325}{90}\right]=\frac{325}{d}=\frac{325}{(150,120,90)}。$$

用符号表示为：若 a，b，c，d，$e\in \mathbf{N}_+$，则有

$$\left[\frac{e}{a},\ \frac{e}{b},\ \frac{e}{c}\right]=\frac{e}{d}=\frac{e}{(a,b,c)}。$$

这正是最小公倍数与最大公约数的关系，且很容易推广到一般情况。

卷上第 11 题相当于：已知三人，每人环营一周所需时间分别是$\frac{720}{9}$，$\frac{960}{7}$，$\frac{1\,200}{5}$，求一个最小的既约分数$\frac{a}{b}$，使$\frac{9a}{720b}$，$\frac{7a}{960b}$，$\frac{5a}{1200b}$均为整数(即再次都回到出发点)，并求出该整数。张邱建的术文言之过简，从刘孝孙的细草看，求解过程为：

$$\begin{matrix}720\\960\\1\,200\end{matrix}\xrightarrow{\text{以 240 约之}}\begin{matrix}3 & 9\\4 & 7\\5 & 5\\ \text{分母} & \text{分子}\end{matrix}\xrightarrow{\text{4 因分子}}\begin{matrix}3 & 36\\4 & 28\\5 & 20\\ \text{分母} & \text{分子}\end{matrix}\xrightarrow{\text{约分}}\begin{matrix}1 & 12\\1 & 7\\1 & 4\\ \text{分母} & \text{分子}\end{matrix}$$

从而得甲、乙、丙各行周数为 12、7、4 时，恰好再次同时处于出发点。

对上述细草我们解释如下：

题意为求最小的既约分数$\frac{a}{b}$，与下列各数的积为整数，并求出该整数：$\frac{9}{720}$，$\frac{7}{960}$，$\frac{5}{1\,200}$。同乘以最大公约数 240 得：$\frac{9}{3}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{5}{5}$；

因$\frac{9}{3}$，$\frac{5}{5}$均为整数，同乘以最大分母 4 得：$\frac{36}{3}$，$\frac{28}{4}$，$\frac{20}{5}$；约分后即得各行周数：12，7，4；

由此可得 $\frac{a}{b}=240\times4$。

上述过程实质上包含了下列一般事实：

求最小的既约分数$\frac{a}{b}$使$\frac{a}{b}/\frac{a_i}{b_i}=\frac{ab_i}{ba_i}(i=1,2,\cdots,n)$为整数，并求出该整数，其算法如下：

由$\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_2}{a_2}$，…，$\frac{b_n}{a_n}$，求出：$d=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$；$d'=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，同乘以d，除以d'，并约分得：$\frac{b_{01}}{a_{01}}$，$\frac{b_{02}}{a_{02}}$，…，$\frac{b_{0n}}{a_{0n}}$；

找出其中最大分母c_1，同乘以c_1并约分得：$\frac{b_{11}}{a_{11}}$，$\frac{b_{12}}{a_{12}}$，…，$\frac{b_{1n}}{a_{1n}}$；

找出其中最大分母c_2，同乘以c_2并约分得：$\frac{b_{21}}{a_{21}}$，$\frac{b_{22}}{a_{22}}$，…，$\frac{b_{2n}}{a_{2n}}$；

……

如此继续下去，设k步完成，每步的最大分母分别为c_1，c_2，…，c_k，诸分数化为整数：e_1，e_2，…，e_n，则

(1)所得整数e_i即为$\frac{ab_i}{ba_i}(i=1,2,\cdots,n)$；

(2)d，c_1，c_2，…，c_k之积即为诸分母a_1，a_2，…，a_n的最小公倍数；

(3)所求$\frac{a}{b}=\frac{dc_1c_2\cdots c_k}{d'}$；

(4)最小公倍数与最大公约数的一般关系：

$$\left[\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{b_n}\right]=\frac{(a_1,a_2,\cdots,a_n)}{(b_1,b_2,\cdots,b_n)}c_1c_2\cdots c_k$$
$$=h(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n),$$

其中$h=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n]$，　$a_i/b_i=h/b'_i$　$(i=1,2,\cdots,n)$。

《九章算术·少广》前11问都是已知面积为一亩的长方形田，用几个分数连加的和来表示它的少广(宽边)求纵(长边)的问题。其中就涉及到求几个分数的和及诸分母的最小公倍数问题，其一

般过程如下：

(1)列出题设分数：1，$\frac{1}{a_1}$，$\frac{1}{a_2}$，…，$\frac{1}{a_n}$，$a_i \in \mathbf{N}_+(i=1,2,\cdots,n)$；

(2)用其中最大分母 c_1 遍乘各分子：c_1，$\frac{c_1}{a_1}$，$\frac{c_1}{a_2}$，…，$\frac{c_1}{a_n}$；

(3)约简分数：c_1，$\frac{c_{11}}{a_{11}}$，$\frac{c_{12}}{a_{12}}$，$\frac{c_{1n}}{a_{1n}}$；

(4)重复上述过程，直到分数全部变成整数。设每次的最大分母分别为 c_1，c_2，…，c_k，最后所得整数分别为：c，e_1，e_2，…，e_n。则

$$1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{e_1+e_2+\cdots+e_n}{c}。$$

以上在求得最小公倍数 c 的同时，也求得了分数的和。上述过程是对单位分数而言，只要略作修改就可转化为一般分数的求和问题。其算法井井有条，深具中算特色，对我国数学(如秦九韶的大衍求一术)影响很大。张邱建的算法就是对《九章算术》这一算法的继承与发展。

张邱建在开卷第一句就说：“夫学算者不患乘除之为难，而患通分之为难。是以序列诸分之本元，宣明约通之要法。”即他著书之旨在阐明约分与通分的要法，以解学算者之难。

从上述分析我们可以看出他对约分术是十分熟练的，并较《九章算术》及《刘徽注》有所创新。在分数的通分问题上，张邱建用诸分数分母的连乘积为公分母，看起来似乎对最小公倍数缺乏认识，其实不然。仅从卷上第10和11题我们就可以看出，张邱建对最大公约数、最小公倍数以及它们之间的关系是有深刻认识的，其理论水平当在《九章算术》及《刘徽注》之上。采用诸分母的连乘积作为公分母正反映了他处理问题的灵活性。因为诸分母较小时，用连乘积以求方便而已。若先求得诸分母的最小公

倍数，再通分，反而较用诸分母的最小公倍数繁琐。因为求最小公倍数需另外置算，这本身就是一个较复杂的过程。《九章算术》方田章合分术、减分术、平分术，课分术处理分数问题，最多为四个分数，且分母都很小，用诸分母之积作为公分母较方便。正如李淳风在注释《九章算术》时所述："凡为术之意，约省为善。"少广章少广术之所以采用最小公倍数，是因为分数个数较多，多者达 12 个。可见，中算家处理问题是十分灵活的，其基本原则是省算约简，正如《夏侯阳算经》称："夫算之法，约省为善。"从《孙子算经》所出现的大数看，有 376 572 715 308÷354 294＝1 062 882，且古人是用算筹布算。从考古的发掘看，汉代算筹的长度最长为 13.80 厘米，最短为 12.60 厘米，大多数为 13.50 厘米，仅以最短的算筹排列，上述第一个大数也约有 12.60 厘米×12＝1.512 米长，若再有上下左右等位置上的数字或计算，则是十分庞杂的。因此如何用尽可能少的算筹解决更多的问题，是中算家顺利进行计算的重要问题。这大概是《九章算术》及《张邱建算经》中未全部采用诸分母的最小公倍数作公分母的原因吧，虽然它们都对最小公倍数有精彩的阐述。

二 与《九章算术》相似算题的不同求解法

《张邱建算经》中有一些算题与《九章算术》盈不足章的算题十分相似，但解法有别。张邱建先是依据算题本身的性质阐明新的解法，然后称"盈不足术为之，亦得"。我们对他的新解法进行分析：

卷上第 24 题(与盈不足章第 15 题相似)：

"今有绢一匹买紫草三十斤，染绢二丈五尺。今有绢七匹，欲减买紫草，还自染余绢。问减绢、买紫草各几何？术曰：置今有绢匹数，以本绢一匹尺数乘之，为减绢实。以紫草三十斤乘之为买紫草实。以本绢尺数并染尺为法。实如法得一。"

由题意：1 匹绢可买紫草 30 斤，这 30 斤紫草可染绢 25 尺；即若有 65 尺绢，可拿出 40 尺买紫草 30 斤，正好染剩余 25 尺绢。这样：

今有绢：用于买紫草绢：自染余绢＝65∶40∶25。

由今有术，买紫草绢：$\frac{7\times40}{65}$匹；买紫草：$\frac{7\times40\times30}{65}$斤；减绢：$\frac{7\times25}{65}$匹。

卷上第 29 题（与盈不足章第 18 题相似）：

“今有金方七，银方九，称之适相当，交易其一，金轻七两。问：金银各重几何？术曰：金、银方数相乘，各以半轻数乘之为实。以超方数乘金、银方数，各自为法。实如法而一。”

张邱建用四则运算求解：

(1)银方比金方轻为$\frac{7}{2}$两；

(2)金（或银）的总重量为$\frac{7}{2}\div(\frac{1}{7}-\frac{1}{9})$两＝$\frac{7}{2}\times(7\times9)\div(9-7)$两；

(3)金每方重为$\frac{7}{2}\times(7\times9)\div(9-7)\div7$ 两；银每方重为$\frac{7}{2}\times(7\times9)\div(9-7)\div9$ 两。

卷上第 30 题（与盈不足章第 9 题相似）：

“今有器容九斗，中有米，不知其数。满中粟，舂之，得米五斗八升。问：满粟几何？”

“术曰：置器容九斗，以米数减之。余，以五之，二而一，得满粟斗数。”

因为粟∶糠＝5∶2，今有糠 9 斗－5 斗 8 升＝3 斗 2 升。

由今有术，粟数＝3 斗 2 升×5/2。

卷中第 17 题（与盈不足章第 20 题相似）：

“今有人持钱之洛，贾利五之二。初返归一万六千，第二返归

一万七千，第三返归一万八千，第四返归一万九千，第五返归二万。凡五返，归本利俱尽。问：本钱几何？”

“术曰：置后返归钱数，以五乘之。以七乘第四返归钱数加之，以五乘之。以四十九乘第三返归钱数加之，以五乘之。以三百四十三乘第二返归钱数加之，以五乘之。以二千四百一乘初返归钱数加之，以五乘之。以一万六千八百七而一，得本钱数。”

其求解相当于设初本为 x，则

$$\left(\left\{\left[\left(\frac{7x}{5}-16\,000\right)\frac{7}{5}-17\,000\right]\frac{7}{5}-18\,000\right\}\frac{7}{5}-19\,000\right)\frac{7}{5}-20\,000=0,$$

解得

$$x=\left(\left\{\left[\left(\frac{20\,000\times 5}{7}+19\,000\right)\times\frac{5}{7}+18\,000\right]\times\frac{5}{7}+17\,000\right\}\times\frac{5}{7}+16\,000\right)\times\frac{5}{7}。$$

《九章算术》对应题目用盈不足术求解，刘徽作注时，用逆推法给出题目所对应的一元一次方程的解，张邱建则是对刘徽思想的继承。

卷中第 18 题(与盈不足章第 13 题相似)：

“今有清酒一斗直粟十斗；醑酒一斗直粟三斗。今持粟三斛，得酒五斗。问：清、醑酒各几何？”

“术曰：置得酒斗数，以清酒直数乘之，减去持粟斗数，余为醑酒实。又置得酒斗数，以醑酒直数乘之，以减持粟斗数，余为清酒实。各以二直相减，余为法。实如法而一，即得。”

5 斗清酒值粟 50 斗，比今持多 20 斗；1 斗清酒比 1 斗醑酒多值粟 7 斗。故由今有术醑酒斗数为 20/7 斗，同理得清酒数为 15/7 斗。

三　勾股比例的应用

卷上第12，14，15题，卷下第7，8，9，10题都是关于勾股相似形问题。

(1)勾股测量

卷上第12题是一望问题，与《九章算术》勾股章第23，24题相同。

卷上第14题是二望问题。

“今有木(*AB*)，不知远近、高下。立一表(*DC*)高七尺，人去表(*EC*)九步立，望表头适与木邪(斜)平。人目去地(*EF*)七尺二寸。又去表(*GC*)三十步，薄(逼近)地遥望表头，亦与木端邪平。问木去表(*BC*)及高(*AB*)几何?”

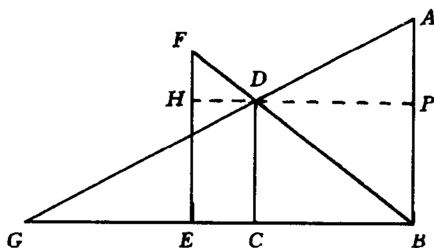


图2.2.4　求木高远

如图2.2.4，分别利用勾股相似比率$\triangle FHD$与$\triangle DCB$，$\triangle GCD$与$\triangle DPA$求得。

《海岛算经》第1题也是二望问题，需立两表，公式的推导与计算也相对复杂；该题只立一表，通过观望被测木的端末把问题转化得十分简单，即将《海岛算经》中只望顶端所得复杂问题，简化为两次相似勾股形问题，很有创见。当然，海岛与木在实际测量上有很大不同，海岛的顶端易于观测，而它所对应的垂直底端则难以观测，但我们认为张邱建是把木看作海岛(或其它物体)的

抽象。

卷上第 15 题是三望问题：

"今有城($ABCD$)，不知大小、去人远近。于城西北隅而立四表，相去各六丈，令左两表(F,E)与城西北隅(CD)南北望参相直。从右后表(G)望城西北隅(C)，入右前表(HJ)一尺二寸。又望西南隅(D)，亦入右前表(HI)四寸。又望东北隅(B)，亦入左后表(FK)二丈四尺。问城去左后表(FC)及大小(BC、CD)各几何？"

如图 2.2.5，由相似勾股形$\triangle HJG \backsim \triangle LCG$得：

$FC=GL=\dfrac{CL \cdot HG}{HJ}$；同理，由$\triangle HJG \backsim \triangle MDG$，$\triangle FGK \backsim \triangle OBK$分别得：$CD=GM-FC=\dfrac{DM \cdot GH}{HJ}-\dfrac{CL \cdot HG}{HJ}$， $BC=KO=\dfrac{OB \cdot FG}{KF}=\dfrac{(FC-KF)FG}{KF}$。

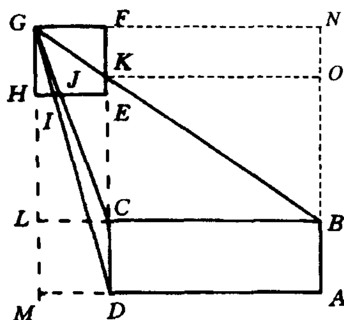


图 2.2.5　测城大小

《九章》勾股章第 22 题立四表以测木远，只是一望。《海岛算经》第 3 题立两表测邑，邑是正方形，问题相对简单，但其求解并不简单。张邱建则推而广之，立四表用三望以测城之长与宽及城去表，问题复杂得多，求解却很方便。

(2)勾股测量的推广

《张邱建算经》将勾股相似问题由勾股测量推广到几何图形中某些长度的求解问题，这是《九章算术》中所没有的。

卷中第7题相当于：已知在等腰梯形中，$AB=10$，$CD=30$，$AH=40$，$GH=15$，求 EF。

如图2.2.6，由 $\triangle ADH$ 与 $\triangle AEG$ 勾股相似得：$EG=\dfrac{DH\cdot AG}{AH}$，$EF=AB+2EG=AB+\dfrac{(CD-AB)(AH-GH)}{AH}$。

卷中第9题相当于：已知正方锥底边长20，高30，欲用平行于底的平面截一底边长6的小方锥，问高多少？

如图2.2.7为过方锥中心轴且与底面交线平行于底边的截面，由勾股形 $\triangle AFG$ 与 $\triangle ABD$ 相似得：$AG=\dfrac{AD\cdot FG}{BD}=\dfrac{AD\cdot 2FG}{2BD}=\dfrac{AD\cdot FE}{BC}$。

卷中第8，10题分别与上两题相似。

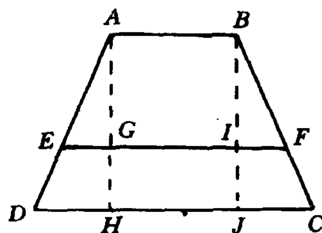


图2.2.6　梯形求解

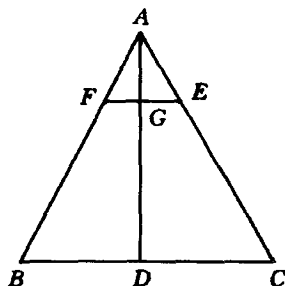


图2.2.7　求方锥高

第三章 《五曹算经》

第一节 概 述

古时分科办事的官署称之为曹。《五曹算经》是一册为地方官府胥吏编写的应用算术书。全书分为五卷，用田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹五个项目标题。《旧唐书·经籍志》著录有“《五曹算经》五卷甄鸾撰”，可知西魏、北周时，甄鸾搜集了当时与州县行政有关的算术问题编成《五曹算经》。

传本《五曹算经》各卷的第一页上都有“唐朝议大夫、行太史令、上轻车都尉、臣李淳风等奉敕注释”，却没有注释，实际上也无须注释。因为全书 67 个算术问题，所有数字计算有意避免分数，只要掌握了整数的加、减、乘、除法就可以解答，内容十分浅显。其中田曹卷除了长方形、三角形、梯形、圆、圆环的面积公式继承了《九章算术》的计算公式是正确的之外，其它面积公式不是有误差相当大的近似算法，就是错误公式。南宋杨辉在他的《田亩比类乘除捷法》中明确指出《五曹算经》腰鼓田、鼓田、四不等田的面积算法是错误的，并且说这些形式的田面积必须分两段测量，分别计算。但《五曹算经》田曹卷的错误公式谬种流传，在明、清二代的有些算术书里还没有校正过来。除田曹卷之外，其余内容均是正比例的应用与整数的四则运算，无创新，其旨在实用而不是学术，数学水平远在《九章算术》之下。

第二节　从《五曹算经》所见北朝社会经济制度

《五曹算经》作为一部为地方官府胥吏编写的实用算术，就其数学内容来讲是粗浅的，而作为考察当时社会经济制度的史料，却是很有价值的。

一　均　田　制

田曹卷首次提出了下列面积的命名与计算公式：腰鼓田、鼓田、蛇田、墙田、箫田、丘田、四不等田、覆月田、牛角田。这些奇形怪状的面积是当时社会实际测量计算所遇到的，是均田制的必然结果与真实写照。据《魏书·食货志》记载，孝文帝太和九年(485年)下诏均给天下民田，"诸男夫十五以上，受'露田'四十亩，妇女二十亩。奴婢依良。丁牛一头，受田三十亩，限四牛。所授之田，率倍之，三易之田，再倍之，以供耕作及还受之盈缩。诸民年及课则受田，老免，及身没，则还田。奴婢、牛随有无以还受。……"田地的种类有露田、桑田、非桑之土、麻布之土、居宅之土、官受公田。这样种类繁多条目具细的均田制，必然遇到各种形状的面积测量与计算，《五曹算经》所给各种面积计算是应时而生的。

二　兵　　役

兵曹卷第1题："今有丁二万三千六百九十二人，责兵五千九百二十三人。"平均四丁出一兵。第2题更甚之："凡三丁出一兵。"如此繁重的兵役是当时社会战乱纷繁的实际反映。据《隋书·食货志》，西魏北周时期"凡人自十八至五十皆任于役。丰年不过三旬，中年则二旬，下年则一旬。"《周书·武帝纪上》云："保定元

年(561年)……三月景(丙)寅，改八丁兵为十二丁兵，率岁一月役。”《周书·宣帝纪》又云：“大成元年(579年)……二月……发山东诸州兵，增一月功为四十五役，走洛阳宫。常役四万人，以讫于晏驾。”足见当时的兵役是随着战争的需要而不断变化的。事实上，当时中国属南北朝时期，各方相与对峙一百多年，在这长时间内，兵戎相见，未有已时，彼此争城略地，连年不断。

三 赋 税

仓曹卷第1题：“今有二千七百户，户责租米一十五斛。”金曹卷第1题：“今有五百六十五户，户责丝一斤十一两八铢。”第2题：“今有五百六十五户，共责丝八石五斤三两八铢。”亦折合户责丝一斤十一两八铢。据《魏书·高祖纪上》：“(延兴)三年(473年)……秋七月，诏河南六州之民，户收绢一匹，绵一斤，租三十石。”“(太和)八年(484年)六月丁卯诏曰：……户增调三匹，谷二斛九升，以为官司之禄。均预调为二匹之赋，即兼商用。”又据《隋书·食货志》，西魏北周时期“凡人自十八至六十有四与轻癃者皆赋之。其赋之法，有室者岁不过绢一匹、绵八两、粟五斛，丁者半之。其非桑之土，有室者布一匹、麻十斤，丁者又半之。丰年则全赋，中年半之，下年一之，皆以时征焉。若艰、凶、札(瘟疫)，则不征其赋。”可见当时人民的赋税是很重的，且不断变化，这种变化正是社会动荡不定的反映。

四 物价与物物对换率

兵曹卷第9题：“今有军粮米……，每斛值钱四百八十二文。”集曹卷第14题：“凡钱五文买雉三只。”金曹卷第7题：“今有贵丝一两，值钱五十六文，贱丝一两，值钱四十二文。”第8题：“今有锦一匹，值钱八贯文。”集曹卷第1，2，3，4题相当于给出：粟米：粝米：粺米：糳米：御米=50：30：27：24：21，与《九

章算术·粟米》同。第5题:"凡粟八斗易麦五斗。"第6题:"凡豆九斗易麻七斗。"金曹卷第5题:"今有丝九两,得绢一匹。"第6题:"今有生丝一斤为练丝一十二两。"

五　收　成

仓曹卷第2题:"今有官田九百亩,凡一步收粟三升二合。"折合7.68斛/亩。

六　兵将的比例与兵将的给养

兵曹卷第7题:"今有一万人:大将十人,裨将二十人,队将一百人,散兵九千八百七十人。给绢有差,大将人给三丈,裨将人给二丈,队将人给一丈五尺,散兵人给九尺。"第3,4,5,6题有散兵分别"人给米七升"、"人给钱五百五十六文"、"人给布一丈二尺三寸"、"人给绢二丈八尺五寸"。

第四章 《夏侯阳算经》

第一节 概 述

北宋元丰七年秘书省所刻《算经十书》中的《夏侯阳算经》是一部伪书，不是唐代立于学馆的《夏侯阳算经》。《张邱建算经·自序》说："其夏侯阳之方仓，孙子之荡杯，此等之术皆未得其妙。"可证《夏侯阳算经》的著作年代是在《张邱建算经》之前。而现传本《夏侯阳算经》是作者搜集了各家算法写出的一部结合当时法令的实用算术书。依据下列史料，我们认为现传本《夏侯阳算经》是在唐代宗在位时期(762～779)写成的。本书卷上引田令、赋役令、仓库令、杂令等都是唐代刑部颁行的法令。"课租庸调"所引赋役令户调法与杜佑《通典·食货志》所载开元二十五年(737年)的法令相同。卷中"求地税"章有按亩收谷两题；"定脚价"章有两税米、两税钱各一题；卷下又有两税钱三题。《新唐书·食货志》说："自代宗时始以亩定税，而敛以夏秋。至德宗相杨炎，遂作两税法。"据此可知代宗在位时已征收两税米和两税钱与租庸调法并行。卷中"分禄料"章有一个分配官本利息给州郡官吏的问题，题中列举的官吏名称及人数，和《唐书·职官志》所载"下州"佐吏相合。又据《新唐书·百官志》说："上元二年(761年)诸州复置别驾，德宗时复省"，本题中有别驾官，足证本书为代宗时期的作品。

钱宝琮认为，传本《夏侯阳算经》的作者可能是韩延[①]。为了

---

① 钱宝琮校点. 算经十书(下册). 北京：中华书局，1963. 551～553

与唐代立于学馆的《夏侯阳算经》区别，今将传本《夏侯阳算经》称为《韩延算术》（参见本书第四编第二章第一节）。

第二节　“明乘除法”浅说

《韩延算术》卷上第一章“明乘除法”引“夏侯阳曰：夫算之法，约省为善……”等约计600字，由此我们了解到《夏侯阳算经》原作的下列内容。

算筹记数的纵横布列制的记述：“一从(纵)十横，百立千僵，千、十相望，万、百相当。满六以上，五在上方，六不积算，五不单张。”这一押韵的顺口溜十分便于初学者琅琅习诵。《孙子算经》中的有关记述只有前四句，后四句是夏侯阳加上去的，使之更加完善。说明《夏侯阳算经》原作成书时代晚于《孙子算经》。同《孙子算经》一样，整数的乘除法布列为上、中、下三层：“上下相乘，实居中央。言十自过，不满自当。以法除之，宜得上商。”这里“言十自过，不满自当”又是十进位值制的明确记述。整数的乘法为：“言步之，上见十步至十，见百步至百，见千步至千，见万步至万。悉观上数，以安下位。上不满十，下不满一。步随多少，以为楷式。”也与《孙子算经》一致，是将乘数依次与被乘数的最高位、次高位依次相乘，并把结果相加。除法遇到除不尽时则难于处理：“凡除分者，全数易了，奇残难用。”夏侯阳将除法分为五类：

一曰法除。即整数的除法：“以少呼多，因法为母，积实为子。”当被除数大于除数时，从被除数中减掉除数的某些倍数，当余数小于除数时，就定义除数为分母，余数为分子。由于商在上面，余数(分子)在中间，除数(分母)在下面，这就形成了我国古代带分数的记法。

二曰步除。即实际应用中带有单位的奇零部分的处理：“其物

残分求尺，尺之求寸，皆上十之。斤之求两，二而八之。两之求铢，三而八之。铢之求累、黍，皆上十之。斗之求升、合、勺、撮，皆上十之。里之求步，三百之。步之求尺，六之。厘、毫、丝、忽，可以意知。”如$\frac{4}{7}$丈$=\frac{40}{7}$尺$=5$尺$+\frac{5}{7}$尺$=5$尺$+\frac{50}{7}$寸$=5$尺7寸$+\frac{1}{7}$寸，如此可依次求得下一级单位的整数部分，其它单位同理。

三曰约除。即分数的约分：“位高者下之，可约者约之，偶则半之，五则倍而折之。一、三、七、九，商用所宜。于此不得，乃为之命分。分母入者须出之，然后为定。”先用观察法：当分子分母都是 10，2 或 5 的倍数时，则退位，2 除或 5 除，这样分子分母无偶因子。其次是试约：用较小的奇因数如 1，3，7，9 试约分子分母，直到无公因子。此时，若分子大于分母，须先化为带分数，再定义分数。这实际上已提出了最简分数的定义与要求。

四曰开平方除。即开平方：“借一算为下法，步之，超一位。幂方十，其积有百。幂方百，其积有万。至百言十，至万言百。”与《九章算术》开平方术同。

五曰开立方除。即开立方：“借一算为下法，步之，超二位。立方十，其积有千。立方百，其积有百万。至千言十，至百万言百。”亦与《九章算术》开立方术同。

古人用算筹作乘除法时，都要布列三层，演算程序相当复杂。在《夏侯阳算经》原作及乘除法的基础上，《韩延算术》中有很多速算法，大大简化了演算程序，可使乘除法仅在一个横列里演算，归纳起来有以下几种：

(1)乘则进位，除则退位

对乘数或除数为 10 的倍数而言，不必乘或除，只需进位或退位即可。

如卷下第 11 题，在做乘法 456.25×40 时称：“进位，四因之”，即 $456.25\times40=4\,562.5\times4=18\,250$。

卷下第12题："置脚一十五丈，以四丈除之，得一丈脚数。退一等得尺，再退得寸脚数。"即

$$每丈钱\frac{15}{4}\xrightarrow{每尺钱}\frac{1.5}{4}\xrightarrow{每寸钱}\frac{0.15}{4}。$$

(2)身外添几(今称定身乘法)

当乘数是两位数，且十位是1(个位非零)时，首位1省却不乘，只把次位以下各位乘被乘数，乘积加在被乘数本身里，就得全部乘积。这种算法对后来的珠算乘除法有一定的影响。

如卷中第3题："置谷，以隔位加2，即得。"1 263.967 3×1.2=1 263.967 3+1 263.967 3×0.2=1 289.246 646。

卷下第20题："先置布数，丈、尺倍之。从下八添，直至数首，退一等，即得。"即 13 463.512×1.8=13 463.512+13 463.512×8/10=24 234.321 6。

卷下第34题："以二添之，亦得。"即 13 464.5×120=(13 464.5×10+13 464.5×2)×10=16 157.4。

(3)十内减一代九乘

当乘数为9时，可将9换成(10−1)，这种算法即为宋代"损乘"的起源。

如卷下第20题："又术：退位，减一，余以二因之，亦得。"即 13 463.512×1.8=13 463.512×(1−0.1)×2=(13 463.512−1 346.351 2)×2=24 234.321 6。

卷下第38题："但从十内减1，亦得。"即 3 464.573 4×0.9=3 464.573 4×(1−0.1)=3 464.573 4−346.457 34=3 118.116 6。

(4)遇五二因，遇偶五因

即乘数或被乘数的末位数字是5时，可先乘以2，用进位法将演算化简，再除以2；若末位数字是2时，可先乘以5，化简后再除以5。对除法(或约分)同上。

如卷下第 11 题："置绢数，于丈尺以下折半五因。"即 $37.5\div40=3.75\div4=(3.75\times5)\div20=0.9375$，$\frac{755}{1\,115}=\frac{755\times2}{1\,115\times2}=\frac{1\,510}{2\,230}=\frac{151}{223}$。

卷下第 20 题："先置布数，丈尺倍之。"即 $2.56\div5=(2.56\times2)\div(5\times2)=5.12\div10=0.512$。

卷下第 22 题："先置绢数，丈尺已下折半五因。"即 $1.34\div4=0.67\div2=(0.67\times5)\div(2\times5)=0.325$。

(5)化大为小

即将乘数(或除数)分解成小于或等于 10 的因子的积。

如卷中第 8 题(卷中第 24 题、卷下第 5,6 题同)："三、八因之，得新官数。"即 $245.384\times24=245.384\times3\times8$。

卷下第 22 题："又术，从头七因讫，折半即得。"即 $3\,463.335\times3.5=3\,463.335\times7\times0.5=24\,243.345\times0.5=24\,243.345\times0.5\times2/2=24\,243.345/2=12\,121.6725$。

卷下第 27 题："先置元钱，折半，六除，是正钱数。"即 $43\,675.2\div12=43\,675.2\div2\div6$。

(6)身外减几(今称定身除)

凡除数首位是 1 的除法运算，首位 1 省却不除，只把除数次位以下各位数乘以商数，乘积从被除数相应的位上减去。这种运算法，也需要估商，估得确切商后，才可把商数同除数次位以下各位相乘，进行乘减。它是定身乘的逆运算，也就是还原。"身外减几"不像定身乘那样应用广泛，《韩延算术》只在卷下"说诸分"第 27 题的"又术"中举例，可见该算法较定身乘难以推广。现将第 27 题分析如下：

"今有两税钱四万三千六百七十五贯二百文，抽身内充脚，每贯二百文，问：正及脚各几何？"

"答曰：正，三万六千三百九十六贯文。脚，七千二百七十九

贯二百文。"

"术曰：先置元钱，折半，六除，是正钱数。将正钱二因，即得脚。"

"又术：但置钱数，身外减二，得正，倍之得脚。"

这里"脚"是脚力钱的简称。每贯(1000 文)抽 200 作脚力钱，是一种附加税。两税钱总数(正税和脚力钱)的 10/12 是正税钱，2/12是脚钱。由"又术"知：两税总数 43 675.2 贯文除以 1.2，得正税钱 36 396 贯。正税钱乘以 0.2，得脚力钱7 279.2 贯文。

第五章 《数术记遗》

第一节 概 述

《数术记遗》全书仅一卷。卷首书“汉徐岳撰。北周汉中郡守、前司隶臣甄鸾注。”徐岳是后汉东莱人(今山东掖县)，撰写过《九章算术注》二卷。而他撰写的《数术记遗》，却不见录于《隋书·经籍志》。

作者自述曾受业于“泰山刘会稽”(会稽是官号)，而“刘会稽”说他曾到天目山中求教于号曰“天目先生”的隐者。书中有“未识刹那之赊促，安知麻姑之桑田；不辨积微之为量，讵晓百亿于大千。”注释者引用佛教的《楞伽经》和虚无缥缈的《神仙传》来注释，可见这本书是脱离现实的，也未必是后汉徐岳的著作。它的原文非常简略，要不是后人注释，很难了解作者的原意。现在，有人认为它是北周甄鸾依托伪造的，可也有不同的意见。本章以甄鸾注的内容为主，进行讨论。

《数术记遗》中的数学内容十分浅显，原无传世的价值。唐代举行明算科考试时，规定以董泉《三等数》和徐岳《数术记遗》为“帖读”的两个小册子，用纸条掩盖书上的3个或4个字，令应试者默读，须要达到90%的准确。由于《数术记遗》是应试明算科必须熟读的书，因此得以流传于后世。

《数术记遗》讨论了三等数：上数、中数和下数。大数的记法，我国先秦时期早有万、亿、兆、京、垓等名目，都从十进，汉以后改从万进。南北朝时期有董泉的《三等数》，大概是讨论大数记法的，但书已失传，无可详考。甄鸾认为记录大数用中数法最方

便，他在《五经算术》里就用这种进位法来批评毛苌、郑玄等的经注。实际上，记录大数取“中数”万进是比较方便的。

《数术记遗》列举了14种不同的记数法：积算、太一算、两仪算、三才算、五行算、八卦算、九宫算、运筹算、了知算、成数算、把头算、龟算、珠算、计数。它们或用少数着色的珠，由珠的位置表示各位数字，或用特制的筹，由筹的方向表示各位数字。当时人们熟悉的算筹记数法要同时应用很多算筹，布置各位数字又有纵横相间的规则。因此，该书提出了各种办法来简化记数法，其中的珠算思想很有卓见。

《数术记遗》不像秦汉以来的其它算书以算题为主，它只有文字叙述，注释中倒有几例算题，涉及到地面测量、不定分析等，继承和发展了《九章算术》、《张邱建算经》等书的某些数学思想。

第二节　《数术记遗》与宗教的关系

一　《数术记遗》与佛教

印度与中国交通甚早，两汉之际佛教就开始从印度传入中国内地。相传，汉哀帝元寿元年(公元前2年)，博士弟子景庐受大月氏使者伊存口授《浮屠经》；东汉初年，楚王刘英“诵黄老之微言，尚浮屠之仁词”；汉明帝(58～75)也曾派人去印度求法，取回《四十二章经》译成汉文。三国魏晋时，盛行玄学，重《老》、《庄》和清谈。以般若学说为基本内容的佛教大乘空宗，因为在思想上与玄学有相似之处，所以受到士大夫的欢迎，并得到迅速传播。东晋十六国时，战乱不止，生灵涂炭，佛教因宣传因果报应和彼岸世界的教义，又受到社会普遍的欢迎。自佛图澄、鸠摩罗什相继来华后，允许汉人出家为僧，各地广立佛寺，国人信佛者日众。甄鸾就是一个佛教徒，《数术记遗》也与佛教有诸多联系：

(1)大数的记法，十进、万进为我国旧法。南北朝时的倍进则多少受佛典的影响。因为《华严经》始译于晋，所举数法为“倍倍变之”。甄鸾的注文就曾引《华严经》。

(2)佛典词汇与用语。原文有：“未识刹那之赊促，安知麻姑之桑田；不辨积微之为量，讵晓百亿于大千。”这里“刹那”、“积微”、“大千”均出自佛典。

注文在解释“未识刹那之赊促”时，引《楞伽经》云：“称量长短者，积刹那数以成日夜。”甄鸾又依佛典作了解释：“刹那量者，壮夫一弹指顷过遥六十四刹那。二百四十刹那名一怛刹那，三十怛刹那名一罗婆，三十罗婆名一摩睺罗多，三十摩睺罗多为一日一夜。其一日一夜有六百四十八万刹那。”在注释“不辨积微之为量，讵晓百亿于大于”时，引《楞枷经》云：“积微成一阿耨，七阿耨为一铜上尘，七铜上尘为一水上尘，七水上尘为一兔毫上尘，七兔毫上尘为一羊毛上尘，七羊毛上尘为一牛毛上尘，七牛毛上尘为一响中由尘，七响中由尘成一虮，七虮成一虱，七虱成一麦横，七麦横成一指节，二十四指节为一肘，四肘为一弓，去村五百弓为阿兰惹。”又引《华严经》云：“四天下共一日月，为一世界。有千世界有一小铁围山绕之，名曰小千世界。有一千小千世界有中铁围山绕之，名曰中千世界。有一千中千世界有大铁围山绕之，名曰大千世界。此大千世界之中，有百亿须弥山。”在这两本佛经的引言之后，甄鸾又进行了解释，所用语言也多近佛经。

二 《数术记遗》与道教

道教是产生于中国的宗教，渊源于古代的巫术和秦汉时的神仙方术。黄老是早期道教(“黄”指黄帝,“老”指老子)。东汉顺帝(125～144)时，张道陵倡导的“五斗米道”教，奉老子为教主，以老子《道德经》为主要经典，于是道教逐渐形成。两晋间，道士

葛洪撰《神仙传》及《抱朴子·内篇》，整理并阐述战国以来神仙方术理论，丰富了道教的思想内容。南北朝时，北魏太平真君(440～450)年间，嵩山道士寇谦之在崇信道教的魏太武帝(423～451)支持下，自称奉太上老君旨意，“清整道教，除去三张伪法”，制订乐章诵试新法，是为“北天师道”；在南朝刘宋时则有庐山道士陆修静“祖述三张，弘衍二葛”，整理三洞经书，编著斋式仪范，道教的理论和组织形式因而愈臻完备，是为“南天师道”。

《数术记遗》与道教也有许多联系：

(1)《数术记遗》一开始就说：“余以天门金虎，呼吸精泉，羽檄星驰，郊多走马，遂负帙游山，跖迹志道，备历丘岳，林壑必过。乃于太山，见刘会稽博识多闻，偏于数术。”道教的思想来源之一是战国时期的哲学家。他们探索大自然之道，而非人生之道。因此，他们不求见用于封建诸侯国的朝廷，而是隐退山林之中，在那里沉思冥想着自然界的秩序，并观察它的无穷的表现。《数术记遗》中的以上陈述正阐明了这种思想。注文直接引用了道教的著作之一《星经》的内容：“昴，西方白虎之宿。太白者，金之精也。太白入昴，金虎相薄，主有兵乱。”又引用道教教主老子的话说：“太白入昴，兵其乱。”“天下有道，却走马以粪；天下无道，戎马生于郊也。”

(2)在注释“黄帝为法，数有十等”时，作者引用了郑玄和徐援的著作，两者都是道教人物。

(3)在注释“安知麻姑之桑田”时，注者引道士葛洪《神仙传》内容：“麻姑谓王方平曰‘自接侍以来，见东海为桑田。向到蓬莱，水乃浅于往者略半也。岂复将为陵陆乎?’方平乃曰：‘东海行复扬尘耳。’”

(4)原文有“从亿至载，终于大衍”，“大衍”一词出自《周易》。注文又引《周易》称：“大衍之数五十，其用四十有九”，“天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地

十”，“天数五、地数五”，“天数二十有五，地数三十。凡天地之数，五十有五”。而《周易》是道教的著作之一。

(5)所列14种记数法中，其用词“太乙”、“两仪”、“三才”、“五行”、“八卦”、“九宫”、“龟”都出自道教，而且与这些记数法相关的思想都依附道教。

总之，《数术记遗》及甄鸾的《注》，受南朝梁时道士陶弘景“三教合流”的主张影响很大，它与当时盛行的佛教和道教有着千丝万缕的联系。在这些联系中，作者主要是借宗教的神秘语言，故弄玄虚，或以此来提高自己的身价。由此我们也可以了解到，当时的儒、佛、道三教在民间的影响都是很大的。

第三节 记 数 法

一 大数的记法

中国自有文字记载开始，记数就主要采用十进制。殷代的甲骨文和西周的钟鼎文都是用一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、百、千、万等字的合文来记10万以内的自然数，都用十进。以后，随着社会和数学的发展，要使用比10万更大的数字。这种大数，在《数术记遗》中，最早作了记载：

“黄帝为法，数有十等。及其用也，乃有三焉。十等者，亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。三等者，谓上、中、下也。其下数者，十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者，万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者，数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。从亿至载，终于大衍。下数浅短，计事则不尽。上数宏廓，世不可用。故其传业，唯以中数耳。”

即大数的表示法有上、中、下三种，它们的值分别为：

	上	中	下
万	10^4	10^4	10^4
亿	10^8	10^8	10^5
兆	10^{16}	10^{12}	10^6
京	10^{32}	10^{16}	10^7
垓	10^{64}	10^{20}	10^8
⋮	⋮	⋮	⋮
载	10^{4096}	10^{44}	10^{14}

这样，“数之为用，言重则变，以小变大，又加循环”，就可以表示任意的自然数。后来人们主要用中数。

二　记　数　法

中国古代的记数法，除了书契之外，主要是用算筹记数。《数术记遗》又给出了许多记数法。书中记述天目先生的话说：“隶首注术乃有多种，及余遗忘，记忆数事而已。”接着就讲述了“积算”等 14 种记数法。

积算，即古代相传的算筹记数，早在《孙子算经》和《夏侯阳算经》中已有详细记述，只是《数术记遗》中的算筹“长四寸，方三分”，较汉代变短而粗，由圆变方，便于取用。太乙算，两仪算，三才算，珠算，这些都是在刻板上横分几道，中有游珠来去其间(详见下节“算具分析”)。五行算，八卦算，九宫算，运筹算，了知算，成数算，把头算，龟算，这些有的用珠，有的用普通算筹，有的用特制的带颜色的算筹来运算。算筹所指的方向，决定数的大小。

以下将后几种特殊的记数法略加叙述：

(1)五行算：“以生兼生，生变无穷。”主要利用筹的五色。玄、赤、青、白、黄分别表示数 1，2，3，4，5，再用配色表示其它数码，白配黄为 9，青配黄为 8，赤配黄为 7，玄配黄为 6。

(2)八卦算：“针刺八方，位阙从天。”它是用一根针的针锋所

指的方向来定算位，指正南为1，指西南为2，正西为3，西北为4，正北为5，东北为6，正东为7，东南为8，中央为9。

(3)九宫算："五行参数，犹如循环。"这就是汉儒所创的三行纵横图。如图2.5.1，以色珠一颗置于某宫(即格)，即为其数。再以珠的颜色辨别算位，如玄色是个位，赤色十位，青色百位，白色千位，黄色万位等等。《吴书》说赵达治九宫一算之术，就是指九宫算。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图2.5.1 九宫算图

(4)运筹算："小往大来，运于指掌。"是取五寸长算筹，以一寸间隔刻五画，自下而上分别表示1，2，3，4，顶端为5。若将算筹调一方向则表示6，7，8，9。再利用食指、中指、无名指、小指的三个指间和指节表示数位。

(5)了知算："首唯秉五，腹背两兼。"即用"了"字的末端和三个折的内外自下而上，先内后外分别表示1，9，2，8，3，7，4，6，"了"的起笔处表示5。

(6)成数算："春夏生养，秋冬收成。"是指用带颜色的算筹，结合不同的方向表示数字，分为生数和成数。玄色，生数1，成数6；赤色，生数2，成数7；青色，生数3，成数8；白色，生数4，成数9。东、南方向表示生数，西、北方向表示成数。黄色筹竖立为5。

(7)把头算："以身当五，目视四方。"用两种算筹：一漫一齿。齿者，筹的四面分别刻有一、二、三、四；漫者为把头，以一当五。

(8)龟算："春夏秋成，遇冬则停。"用龟筹一枚，龟的四面为12时，以龟首指寅为1，指卯为2，指辰为3，指巳为4，指午为5，指未为6，指申为7，指酉为8，指戌为9。龟指亥、子、丑，不以为数。

(9)计数算：是不用算筹，只用心算。

上述记数法，是该书作者考虑到当时布毡运算之烦，欲另辟蹊径，凭空想象而得，多半都依附五行方向，不是都能施诸实用的。

第四节　算具分析

我国古代一直用算筹进行计算，上一节我们对《数术记遗》中的各种筹算进行了分析。我们知道，算筹在计算方面有一定的缺点：一是用算筹拼排 1 至 9 的数码时，共要用到 29 根算筹，平均每个数需要 3.2 根。也就是说排一个数码平均要用 3.2 个动作，速度慢，不利于速算。二是算筹较长，计算时占地多。汉筹长 13.8 厘米，隋筹较短，仍有 8.85 厘米。即使用隋筹，计算一道 4 位乘 4 位积的 8 位的乘法算题，按照筹算乘法的方法将算筹分为上、中、下三层排列，约占长 90 厘米，宽 40 厘米的位置，一张方桌不够做两道这样的算题。除法和多位数的加法也占地很多。宋代马永卿说："出算子约百余，布地上，几长丈余。"[①] 占地既多，工作就不便。随着生产和交换活动的发展，筹算逐渐不能适应生产和交换的需要，尤其是商贾买卖日益频繁，亟需快速计算，算筹的缺点就益加明显，这就需要一种更好的计算工具，因此算盘出现了。

《数术记遗》是最早记载珠算的著作。在书中记载的 14 种算法中，太一、两仪、三才和珠算都是用珠记数的。关于这 4 种算法，《数术记遗》记载如下：

太一算　"太一之行，去来九道。"注文："刻板横为九道，竖以为柱，柱上一珠，数从下始。故曰去来九道也。"

两仪算　"天气下通，地禀四时。"注文："刻板横为五道，竖

① 华印椿．中国珠算史稿．北京：中国财政经济出版社，1987．6

以为位。一位两珠，上珠色青，下珠色黄。其青珠自上而下，至上第一刻主五，第二刻主六，第三刻主七，第四刻主八，第五刻主九。其黄珠自下而上，至下第一刻主一，第二刻主二，第三刻主三，第四刻主四而已。故曰天气下通，地禀四时也。”

三才算 “天地和同，随物变通。”注文：“刻板横为三道，上刻为天，中刻为地，下刻为人，竖为算位。有三珠，青珠属天，黄珠属地，白珠属人。又其三珠通行三道。若天珠在天为九，在地主六，在人主三。其地珠在天为八，在地主五，在人主二。人珠在天主七，在地主四，在人主一。故曰天地和同，随物变通。亦况三元，上元甲子一、七、四，中元甲子二、八、五，下元甲子三、九、六，随物变通也。”

珠算 “控带四时，经纬三才。”注文：“刻板为三分，其上下二分以停游珠，中间一分以定算位。位各五珠，上一珠与下四珠色别。其上别色之珠当五。其下四珠，珠各当一。至下四珠所领，故云‘控带四时’。其珠游于三方之中，故云‘经纬三才也’。”

由于《数术记遗》对各种算法介绍极为简单，又没有附图，注文也不够详尽，所以后人在研究这些算法、算具时，提出了各种不同的意见。

图 2.5.2，2.5.3，2.5.4 是李培业发表于陕西《珠算研究》杂志 1980 年第 2 期的太一算、两仪算、三才算的想象图；图 2.5.5 是许莼舫在《中国算术故事》一书(1954 年中国青年出版社)中刊载的珠算图。它们只是众多研究者中的部分意见。

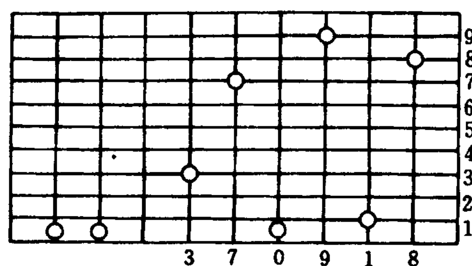


图 2.5.2　太一算图

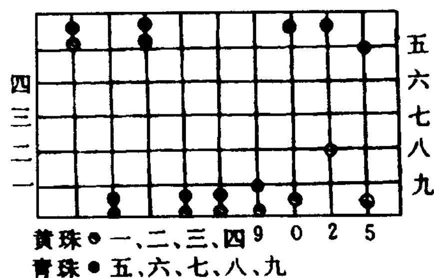


图 2.5.3　二仪算图

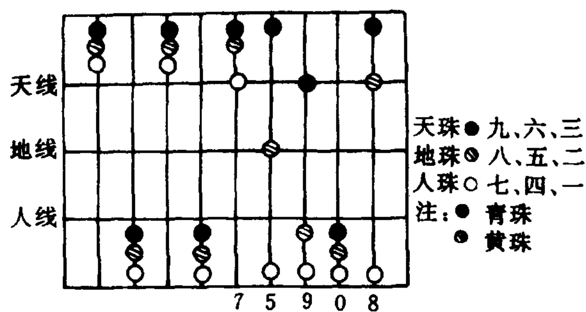


图 2.5.4　三才算图

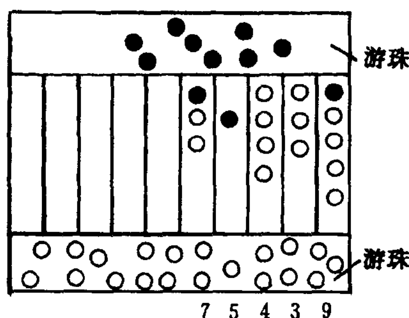


图 2.5.5 珠算图

“珠算”最引人注目，因为它关系到中国算盘的起源问题。实际上，《数术记遗》中的“珠算”应指算器，与现在“珠算”一词的涵义不同。现代的“珠算”是指用算盘来进行加、减、乘、除等的运算方法。《数术记遗》中的“珠算”是指“珠算板”，它与现代算盘有别。

珠算板上分刻为上中下三段，其上下两段置游珠，中间一段记一、十、百、千等位。上段之珠与下段之珠颜色不同。上段一珠，表示五；下段四珠，各表示一。后来的研究者对珠算板是否有柱见解各异，分歧很大。从《数术记遗》原文及注文中，没有关于“柱”的明确记载，从尊重原注文的角度来说，还是认为无柱为妥。[①] 至于珠算板究竟是什么形式，我们只能就原文作合理的解释，很难作出确切不移的论断。图 2.5.5 为许莼舫的想象图，可供参考。

珠算板与现代的珠算盘有什么联系呢？我们说，珠算盘是由珠算板改进而成的，珠算板是珠算盘的前身。《数术记遗》所记载的关于用“珠”来表示数的方法中，已经具备了现代珠算盘的主要思想：

---

① 华印椿. 中国珠算史稿. 北京：中国财政经济出版社，1987. 14～16

(1)以柱贯珠。这在“太一算”中已明确指出：“竖以为柱，柱上一珠。”

(2)珠分当五与当一两种。这就是“珠算”的主要思想，是算筹表示数的自然发展。

现代珠算盘无疑是综合了这两种形式，经过长期的实践和改进而形成的。

用珠算板记数时，一摆即成，珠动数出，省时省力，占地少，速度快，比用算筹记数是一大改进。它对数学和经济的发展起了一定的作用，对此应予高度评价。

第五节　地面测量

在“计数”注文中记有这样一题：“或问曰：‘今有大水不知广狭，欲不用算法，计而知之。’假令于水北度之者，在水北置三表，令南北相直，各相去一丈。人在中表之北，平直相望水北岸，令三相直，即记南表相望相直之处，其中表人目望处亦记之。又从中相望处直望水南岸，三相直，看南表相直之处亦记之。取南表二记之处高下，以等北表点记之。还从中表前望之所，北望之，北表下记三相直之北，即河北岸也。又望上记三相直之处，即水南岸。中间则水广狭也。”

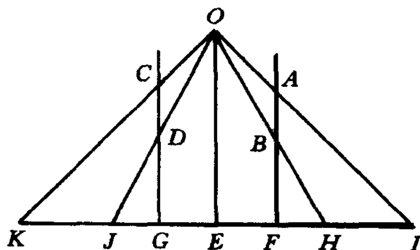


图 2.5.6　测水广狭

如图 2.5.6 欲求水面东西流向水面 HI 的宽度，直接测量不方便，于是，立三根标杆 OE，CG，AF，都在一条直线 KI 上，垂直于河岸，且 $GE=EF$。这时人目在 O 点望水的南北两端 H，I，记下视线与标杆 AF 的交点 A、B。再在标杆 CG 上取 $CG=AF$，$DG=BF$，于 O 点望北方平地，视线 OG，OD 分别交地面于 K，J，则 KJ 即为水面宽。这样，只通过一次地面测量，就可以求得比较复杂的地形测量。方法巧妙，简便可行。

《海岛算经》第 6 题与此题相似，但是需要立两表并连索，测得五个数据，以重差术进行计算，比较复杂。《数术记遗》发展了《海岛算经》中的测望方法，对地面测量很有意义。

第六节　不定分析

“计数”注文中又记有两例不定方程问题，都是模仿了《张邱建算经》中的“百钱百鸡”题：

“或问曰：‘今有鸡翁一只值五文，鸡母一只值四文，鸡儿一文得四只。今有钱一百文，买鸡大小百只。问：各几何?’”

“答曰：鸡翁十五只，鸡母一只，鸡儿八十四只，合大小一百只。”

“或问曰：‘今有鸡翁一只值四文，鸡母一只值三文，鸡儿三只值一文。今有钱一百文，还买鸡大小一百只。问：各几何?’”

“答曰：鸡翁八只，鸡母十四只，鸡儿七十八只，合一百只。”

用现代数学语言来说，若设鸡翁、鸡母、鸡儿分别有 x，y，z 只，则上述两题可列方程如下：

$$(1)\begin{cases}5x+4y+\frac{1}{4}z=100,\\ x+y+z=100。\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}4x+3y+\frac{1}{3}z=100,\\ x+y+z=100。\end{cases}$$

(1)的解为$\begin{cases}x=15+15t,\\y=1-19t,\quad t\in\mathbf{Z}。\\z=84+4t,\end{cases}$

易知(1)只有一组正整数解：$x=15$，$y=1$，$z=84$。

(2)的解为$\begin{cases}x=8+8t,\\y=14-11t,\quad t\in\mathbf{Z}。\\z=78+3t,\end{cases}$

当$t=0$，1时都为正整数解，而书中只给出当$t=0$时的这一组。这是此书的疏漏之处。当然，此书所给的两例不定方程问题均存在正整数解，说明作者在模仿张邱建出题时，是作过一番认真思考的。由于作者本意为“不用算筹，宜以意计之”，所以这两题的具体解法难于知晓，大概也是用与张邱建相同的解法。这两题虽然比《张邱建算经》“百钱百鸡”题没什么创新，但是它们无疑对我国不定方程的研究产生一定的影响。

第七节 其他重要特色

问话形式，独具特色 我国古算书多采用问题集成的形式，通过一些习题阐明数学原理与解题方法，以为实践服务。《数术记遗》则别具一格，采用问话形式，通过“我”与“刘会稽”及“天目先生”的问答展开陈述，原文无一例习题，行文自然，引人入胜，在我国古代数学史上是独一无二的。

拾遗补缺，意义非凡 《九章算术》可以说给中国传统数学制定了著书立说的一个模式。此后的算书多以《九章算术》为典范，南北朝时期的其它算书也都是这样。而《数术记遗》没有这样做，它是将从“隐者”得到的数学知识，唯恐遗失，不以其简单而记之。其中的记数法，尤其是关于珠算板的记叙，资料价值十分宝贵。

旁征博引，史料丰富　由于原文十分粗略，全文不过几百字，后人难以看懂，所以甄鸾详加注释，注释的内容超出了原文。注者引用了《星经》、《汉书》、《乾象历》、《艺经》、《狐疑论》、《楞伽经》、《神仙传》、《华严经》、《诗经》、《周易》、《三等数》等书，内容广博，资料宝贵，为后人提供了难得的史料。

第六章　五部算经在中国传统数学发展中的重要作用

唐高宗显庆元年(656 年)编定的《算经十书》，是中国传统数学流传至今的十分宝贵的 10 部算书。在这 10 部算书中，出于南北朝时期的就有 6 部，其中比较有价值的是前面所述的 5 部。它们在我国传统数学的发展中，起着承前启后的重要作用。

(1)5 部算经除《数术记遗》外，都采用了《九章算术》的模式，通过一个个问、答和术，来阐明数学理论与解题方法，并紧紧围绕实际，为当时的社会实践服务。这种模式在南北朝之后的中国传统数学发展过程中，一直是著书立说的主要模式。特别是《五曹算经》和《夏侯阳算经》，实际上就是一部实用算术，虽然其中无甚高深的数学理论，但对于数学普及与应用却是十分重要的。唐代商业贸易的高度发展，尤其需要这样的实用算术。南宋杨辉的《日用算法》、明朝程大位的《算法统宗》无不受其影响，不仅形式相似，而且许多题目直接来源于这些书籍。

(2)五部算经的内容主要是围绕《九章算术》展开，基本上都可归纳在《九章算术》之中。以《孙子算经》为例，其题目分类可见下表。

表 2.6.1　《孙子算经》题目分类

类别 卷	方田				粟米	衰分	少广（开平方）	商功	均输	盈不足	方程	勾股	同余式组
	整数乘法	整数除法	分数四则运算	面积									
卷中（题号）		18	1 2 3 4	9 13 16 21	5 6 7 8 14	24 25 27	19 20	10 11 12 15 17 18 22 23		28	26		
卷下（题号）	4 5 9 12 13 23	2 6 7 8 10 11 14 16 20 21 22 32 33	17 18 19 24 26 35			30		3	1	15 29 31	27 28	25	26

从前面几章的分析，我们可以看出，五部算经中有许多算题是与《九章算术》或《刘徽注》相似的，其解法或按照《九章算术》原术，或别出心裁，给出新的构思。其中的许多算题又为后人辗转引用，广为流传。

《九章算术》虽为一部很好的教科书，但不是一部启蒙算书，它的起点较高。而南北朝时期的这五部算书充分注意到了这一点，它们采用较为通俗、实用的计算方法，补充了算筹的记数法、四则运算法则、分数的通分约分法则、度量衡的标准与进位关系、各种物质的对换比例等等。这对其后的数学教育与数学发展是很有意义的。隋唐时期，我国数学教育制度中设有“明算科”，明文规定五部算经作为其必修科目。这无疑促使《九章算术》和《刘徽注》的数学理论得以继承并发扬光大。

(3)五部算经不仅是继承，而且有所发展和创新。其中独到之处每每启迪后人，意义非凡。《孙子算经》中的“物不知数”题是一次同余式问题，该类问题在《九章算术》出现的年代或许早已在天文历算中出现过，但是找不到任何记载。《孙子算经》关于该类问题的阐述与求解，引起了后人的极大关注，并直接导致了南宋秦九韶关于一次同余式组的系统而又完善的理论研究。

继《九章算术》的“五家共井”题之后，《张邱建算经》又给出了著名的“百钱百鸡”题。《数术记遗》模仿《张邱建算经》又给出了两例类似问题。这些问题都可归纳为线性不定方程组，而且都是用方程术求解。清代学者如骆腾凤、时曰醇、黄宗宪等又相继对“百钱百鸡”题进行了系统的研究，把不定方程组归结为同余式，成绩斐然。

在《孙子算经》和《张邱建算经》中，开方术有了进一步发展，开方程序较《九章算术》更为明确详细。尤其开带从平(立)方的发展，为唐代王孝通《缉古算经》中的三次方程的求解奠定了基础，并影响着宋元时期我国高次方程的数值解的一般方法。

早在《九章算术》和《孙子算经》时代，人们已经遇到了等差或等比数列问题，但未见有按等差或等比数列处理的明确记载。《张邱建算经》则对数列，尤其是等差数列进行了系统研究，给出了通项、前 n 项和公式，熟练地处理了 a_1，d，n，a_n，S_n 之间的关系，解决了较复杂的数列问题。这对我国宋元时期高阶等差数列的研究是有一定影响的。

算筹是我国古代的主要计算工具，但随着数学的发展，算筹缺点逐步暴露出来。《数术记遗》为解决这一问题给出了 14 种记数法。其中“珠算”为我国珠算盘的最早记载，包含着现今珠算盘的许多宝贵思想，对我国珠算盘的发展意义尤为重大。

第三编

南北朝知名筹人

第一章　赵歐与何承天

第一节　赵　歐

赵歐，河西敦煌人，北凉历算家。其生卒年代无从查考，但其生活时期大致应在4世纪后期至5世纪前期。

赵歐在北凉担任太史，从事北凉的天文历法研究和管理工作。《宋书》卷九十八“氐胡”称：“河西人赵歐善历算”。北凉沮渠蒙逊于玄始元年(412年)颁行赵歐所撰《玄始历》(有时也称《元始历》)，这是在少数民族政权下提出的一部重要历法。《玄始历》后来被广为传播，不仅在北凉施行，而且在北魏灭北凉后，为北魏采用达70年之久(452～522)，正光三年(523年)为《正光历》所替代。《魏书》卷一〇七“律历志上”有记载：“世祖平凉土，得赵歐所修《玄始历》，后谓为密，以代《景初(历)》。”可见，《玄始历》是当时比较优秀的历法。《景初历》为北魏建立后一直采用的历法，系三国时杨伟所造。

由于《玄始历》已经失传，我们无法知道《玄始历》有多少创造性成果。但是，赵歐改闰周，对后世影响深远。从春秋中期(公元前6世纪)到南北朝前，约有1 000年，我国均采用19年7闰

的闰周。所谓19年7闰，是指19个回归年等于19个阴历年加7个闰月。19个阴历年是228个朔望月。加上7个闰月，就是235个朔望月。这就意味着19个回归年的长度等于235个朔望月。因此，在修改回归年数值的时候必然会影响朔望月数值。如果依照实际观测来修订朔望月数值，那就必然要影响回归年。历算家们长期反复的实践表明：在19年7闰的闰周之下，减低朔望月的误差，会导致回归年误差的增大，而降低回归年的误差，则朔望月的误差便增大。于是，人们开始怀疑19年7闰这个闰周的精确性。赵𢾊首破千年章法，废弃了19年7闰的旧闰周，创用600年221闰的新闰周。而且，赵𢾊定回归年为365.244 306日，朔望月为29.530 600日。这两项数字都比较精确。后来，祖冲之沿着赵𢾊的这个方向，把闰周又推进了一步，改为391年144闰，并且使他的回归年和朔望月数值达到了更高的精确度。

根据《隋书·经籍志》的记载，赵𢾊著述甚丰：计有《河西甲寅元历》一卷、《甲寅元历序》一卷、《七曜历数算经》一卷、《阴阳历术》一卷、《赵𢾊算经》一卷。这里的《甲寅元历》即前述《玄始历》，因《玄始历》以甲寅为历元，故又称《甲寅元历》。此外，据《宋书》卷九十八“氐胡”记载，元嘉十四年(437年)，以交换图书为目的，北凉派茂虔向南朝奉表献方物，献书154卷，其中有《周髀》一卷、《赵𢾊传》并《甲寅元历》一卷。因此，南朝人何承天、祖冲之等得以读到赵𢾊的著作，了解其科学创造。何承天《元嘉历》是元嘉二十年(443年)提出的，其中可能受到赵𢾊的某些启示或影响。祖冲之受赵𢾊的影响，则更是明显。可惜的是，赵𢾊的著作都未能流传下来，但是根据其在历法方面的创造性成果，特别是关于闰周问题的研究离不开大量的计算，我们可以推断，赵𢾊为一造诣精深的数学家。

第二节 何 承 天

一 身世与事迹

何承天(370～447)，东海郯(今山东省郯城县)人。从祖(祖父之兄)何伦，为晋朝右卫将军。何承天5岁失父，由母亲徐氏抚养成人。徐氏为晋朝秘书监徐广之姐，聪明博学，因而何承天从小受到良好的教育。《宋书》卷六十四称："承天幼渐训义，儒史百家，莫不该览。"何承天的叔父何肹"为益阳(今湖南省益阳县)令"。其舅父徐广(352～425)"家世好学，至广尤精，百家数术，无不研览"，为东晋著名的饱学之士。

何承天在东晋和刘宋两朝为官多年，但因其刚愎自用，与其他官员相处常不协调。后来，转为太子率更令，并继续著书立说。元嘉十九年，刘宋设立国子学，何承天被授"国子博士"。当时由皇太子讲授《孝经》，何承天与中庶子颜延之一起执教。不久，何承天升至御史中丞。当时外敌骚扰边境，皇帝谋求良策，何承天撰写《安边论》，向朝廷献计。他总结了历史经验，分析了当时的情势，认为"安边固守，于计为长"，并提出四项建议：一曰移远就近，以实内地；二曰浚复城隍，以增阻防；三曰纂偶车牛，以饰戎械；四曰计丁课仗，勿使有阙。元嘉二十四年，何承天"迁廷尉，未拜，上欲以为吏部，已受密旨，承天宣漏之，坐免官，卒于家，年七十八。"(《宋书》卷六十四)

何承天博学多才，著述丰富。据《宋书》和《隋书·经籍志》等记载，何承天有《礼论》300卷，《春秋前传》10卷，《春秋前杂传》9卷，《姓苑》10卷，《漏刻经》1卷，《皇览》120卷(与他人著作合并而成)，《何承天集》20卷，《纂文》3卷，《元嘉历》2卷等。据《宋书·律历志》介绍，何承天善对弈，皇帝"赐

以局子”；他还能弹筝，并得到皇帝“赐银装筝一面”。

何承天是一位杰出的天文学家，其主要贡献在于编撰《元嘉历》，创立调日法，倡议用定朔注历，实测表影长度以定节气。

据《宋书·律历志》(卷十二)记载，元嘉十二年(435 年)，何承天“上表”称：“又史官受诏，以土圭测景，考校二至，差三日有余”。这说明，他以土圭测量方法考校冬至日和夏至日，发现当时历法(景初历)所定已差三日有余。这一事实证明，其贡献不仅仅在于发现了当时所用历法的误差，更重要的是，开创了利用圭表测影之先河，对祖冲之等后人都有深刻的影响。《中国天文学史》(科学出版社,1981 年 5 月)认为,圭表测影是南朝在天文测量方面的主要成就。

刘宋于元嘉二十二年(445 年)颁行何承天所撰《元嘉历》，这是在汉族政权下颁行的一个先进的历法。《元嘉历》的特点有三。首先,《元嘉历》有良好的观测基础。何承天继承了其舅父徐广所积累的四十多年天文观测记录，并且其本人又继续观测了 40 年。《宋书·律历志》(卷十二)有记载，“元嘉二十年，(何承天)上表曰：臣授性顽惰，少所关解。自昔幼年，颇好历数，耽情注意，迄于白首。臣亡舅故秘书监徐广，素善其事，有既往《七曜历》，每记其得失。自太和至太元之末，四十许年。臣因比岁考校，至今又四十载，故其疏密差会，皆可知也。”其次，何承天依据冬至前后日影的观测判定，按《景初历》所定冬至已后三日有余，并在《元嘉历》中作了改正。其三，何承天认为，既然以寅月为岁首，那么就应该以寅月的中气——雨水为气首，因而《元嘉历》的历元就定在正月朔旦夜半雨水的时刻。何承天于元嘉二十年(443 年)在“上表”中说：“是故臣更建《元嘉历》以六百八为一纪，半之为度法，七十五为室分，以建寅之月为岁首，雨水为气初，以诸法闰余一之岁为章首”。何承天在元嘉二十年提出的《元嘉历》，经过太史令等实测和多方论证，包括解答历算家员外散骑郎皮延

宗等所提出的问题，朝廷决定于元嘉二十二年起采用《元嘉历》："方今皇犹载晖，旧域光被，诚应综覈晷度，以播维新。承天历术，合可施用。宋二十二年，普用《元嘉历》。"（《宋书·律历志》）

此外，何承天认为，日食应该在名副其实的朔日，月食则应在望日。因此，他主张在历日安排上也采取定朔而废除平朔。但是，如果定朔安排历日，就可能出现连着三个大月和连着两个小月的情况，这是违反大、小月相间，至多有两个月连大的千百年习惯的。事实上，早在东汉时代有人提出九道法时便遇到过这个问题，九道法因为违反习惯而遭到强烈反对。后来刘洪的《乾象历》仅在计算日食和月食时引进定朔和定望，而在历日安排上仍采用平朔、平望。而今何承天又提出定朔问题，保守者以当年（东汉）同样的理由反对。年迈的何承天虽有革新思想，却无坚持的勇气。他撤回定朔的建议，继续采用平朔。

二　调　日　法

何承天的调日法是他对数学的贡献。

我国古代，尽管十进制计数法发展较早，但十进制小数的记数法却发展较晚。因此，我国古代的天文历算中，各种单位以下的零数部分都是用分数表示的。例如，四分历的回归年零数为1/4，此4即为"日法"。同样，四分历的朔望月为$29\frac{499}{940}$日，此分母940为"日法"，而分子499则被称为朔余。由是，法即除法中之除数，分数中之分母。

然而，回归年和朔望月之类，都必须以观测为基础来决定。而观测所得数据自不会有以940这样的数字为分母的分数形式。其中必然经过了"加工"。依照清代李锐的考证，这种"加工"谓之调日法。而根据《宋史·律历志》的记载，调日法是何承天最先使用的。宋朝周琮在其《明天历》中有一个项目，叫做"调日

法”，并且指出，“造历之法，必先立元，元正后定日法，法定后度周天，以定分、至，三者有程，则历可成矣。”这里，他把日法看得很重要，同时批评了“率意加减，以造日法”的做法。进而，他摆出了何承天的方法：“宋世何承天更以四十九分之二十六为强率，十七分之九为弱率，于强弱之际以求日法。承天日法七百五十二，得一十五强，一弱。自后治历者莫不因承天法，累强弱之数”。

据此，何承天取 26/49 为其所测朔望月零数部分的强率，取 9/17 为弱率。把 15 个 49 和 1 个 17 相加，就得到日法 752。事实上，26/49＝0.530 612，超过何承天所测朔望月日数以下的零数，故谓之强率；9/17＝0.529 412，少于所测朔望月日数以下的零数，故称为弱率。因而精确的朔望月零数，应当在强率与弱率之间。何承天将强率、弱率的分子分母分别相加，得到一个新分数：

$$\frac{26+9}{49+17}=\frac{35}{66}。$$

而 35/66＝0.530 3 小于观测值，故取其为弱率，再以 35/66 为弱率，26/49 为强率，得到

$$\frac{35+26}{66+49}=\frac{2\times 26+9}{2\times 49+17}=\frac{61}{115}。$$

但 61/115＝0.530 4 仍然小于其观测值，又取其为弱率，而继续之。直至得到

$$\frac{15\times 26+9}{15\times 49+17}=\frac{399}{752}。$$

而 399/752＝0.530 585 1，与其观测值充分接近，何承天满意，就确定下来，作为朔望月零数比较精确的近似分数。于是，何承天取 752 为日法，399 为朔余。这里，通过不断调整强弱分数而得日法，故谓之调日法。

这一过程中，何承天运用着下列定理：

设 a，b，c，d 均为正数，如果 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，那么

$$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d},$$

进一步，则有

$$\frac{a}{b}>\frac{ma+nc}{mb+nd}>\frac{c}{d}\ \text{（其中 } m,n \text{ 为自然数）。}$$

这是一种分数插入法。据美国数学史学家 H・伊夫斯著《数学史概论》(欧阳绛译，山西人民出版社，1986 年)说，在西方要到 15 世纪法国学者休凯(Chuquet N，1451～1500)才作介绍，而我国古代历算家则早已熟练地运用于许多以分数为零数的天文数据。例如，唐朝僧一行《大衍历法》(727 年)的朔望月零数 1 613/3 040 是 3 弱 61 强：

$$\frac{26\times61+3\times9}{49\times61+3\times17}=\frac{1\ 613}{3\ 040}\text{。}$$

又如闰周问题，已知 11 年 4 闰，闰月嫌多，取 4/11 为强率；19 年 7 闰，闰月嫌少，便以 7/19 为弱率。以 1 强 31 弱即得赵歌的 600 年 221 闰：

$$\frac{4+31\times7}{11+31\times19}=\frac{221}{600}\text{。}$$

而 1 强 20 弱则是祖冲之的 391 年 144 闰：

$$\frac{4+20\times7}{11+20\times19}=\frac{144}{391}\text{。}$$

近点月也是这样：5/9 为强率，56/101 为弱率。何承天的近点月是 5 强 7 弱：

$$\frac{5\times5+7\times56}{5\times9+7\times101}=\frac{417}{752}\text{。}$$

祖冲之的近点月为 619 强 206 弱：

$$\frac{619\times5+206\times56}{619\times9+206\times101}=\frac{14\ 631}{26\ 377}\text{。}$$

当然,调日法在天文数据的分数表达方面也是有一定限制的。事实上，很少有天文数据能用简单分数表达，相反，数据越精密，相应的分数就越复杂。而习惯于用调日法则会使天文学不易摆脱分数的局限性，从而影响天文数据精确性的提高，并增加天文计算的复杂性。随着天文学的发展，对天文数据的精度要求日益提高，因而调日法也逐渐被冷落。但是，何承天调日法作为数学上的一大成就，是应充分肯定的。

第二章 祖 冲 之

第一节 身世与事迹

祖冲之(429～500)，字文远，我国杰出科学家之一。祖冲之的祖籍是范阳遒县(今河北省涞水县)，他的祖辈原在晋朝为官，后因战乱迁居江南。祖冲之的曾祖父祖台之是晋朝侍中，为中央要员，他同时爱好文学，著有《志怪》二卷，被收入《隋书·经籍志》史部《杂传》。祖冲之的祖父祖昌在刘宋朝廷任大匠卿，是负责营建方面的官吏。祖冲之的父亲祖朔之是刘宋奉朝请(此属一种闲职官员)。家学渊源是祖冲之从事科学活动极为有利的条件。

青少年时祖冲之就聪慧机敏，勤奋好学，闻名于时。因此，宋孝武帝把祖冲之送进华林学省，并赐予房子、车子和衣服等，这是祖冲之进行科学研究的重要一步。华林园乃国家藏书讲学之所，祖冲之在这里博览群书，思考问题，进行科学研究。后来，祖冲之离开华林园，进入仕途。先是担任南徐州(今江苏省镇江市)从事史(州刺史的属员)，后被调回朝廷任公府参军(司徒的属员)。一段时间后，祖冲之被派任娄县(今江苏省昆山县东北)县令。宋朝末年，祖冲之又回到朝廷担任谒者仆射，掌管朝廷宴会、大臣朝见皇帝以及重大典礼的礼仪事项。公元479年，宋顺帝让位，齐王萧道成做了皇帝，刘宋朝垮台，萧齐朝建立。祖冲之继续在萧齐朝廷为官。后来，祖冲之被任命为长水校尉(特种部队的将领)，并享受四品俸禄。永元二年(500年)，祖冲之逝世，享年72岁。

祖冲之熟读经诗，在文史哲方面造诣精深。他著有《易经义》、《老子义》、《庄子义》、《论语释》、《孝经释》等，并撰小说

《述异记》10 卷。因此，《南齐书》和《南史》是将祖冲之业绩收入文学传内的。祖冲之还精通音律，又善对弈，因而有资格担任谒者仆射。《南史》有记载："冲之解钟律博塞，当时独绝，莫能对者。"

然而，祖冲之更重要的贡献是在科学技术方面。这里先介绍他在数学以外的成就。

天文学方面，他仔细研究各家古历，特别是当时国家颁布施行的何承天《元嘉历》，批判地继承了前人的工作，并以长期的天文观测实践为基础，运用他精湛的数学知识，编撰出当时最优秀的历法《大明历》。《大明历》包含了祖冲之对天文历法的许多革新和创造，其中主要有：

(1)把岁差引入历法计算。所谓"岁差"，是指这样一种现象，即某年的冬至点在星空中的位置不同于上一年的冬至点在空中的位置，而是略有后退(每年以 50.2 秒的速度向西移行)。祖冲之将东晋虞喜发现的岁差现象引入历法计算，有创始之功。正因为这样，使得回归年与恒星年有了区别。

(2)改变闰法。从秦汉到魏晋，我国历算家基本上采用 19 年 7 闰的闰法。后来北凉历算家赵畋于公元 412 年在其所编《玄始历》中采用 600 年 221 闰。祖冲之则认为 19 年 7 闰的闰数过多，提出 391 年 144 闰。

(3)发现交点月。交点月即月球两次穿过黄道相应交点(即月球所行之白道与黄道之交点)的周期。祖冲之首次计算出 1 交点月为 $27\frac{5\ 598}{26\ 377}$ 日，这是相当精密的。

(4)关于五大行星的会合周期和木星的恒星周期研究。所谓的行星会合周期，其现代解释是地球(观测者所在的地方)、某行星和太阳在一直线时(如太阳在中间叫"上合"，地球和行星在太阳同侧时叫"下合")，两次上合或两次下合的时间。祖冲之所得水星会

合周期和金星的会合周期都较精确。他所得木星的恒星周期也优于前人。

祖冲之在编成《大明历》后，于大明六年(462 年)进呈刘宋朝廷，但由于宋孝武帝之宠臣太子旅贲中郎将戴法兴的反对，当时未能施行。直到梁朝天监九年(510 年)才得以颁行，至陈朝灭亡(589 年)《大明历》共行用 80 年。

在关于太阳视运动的研究方面，祖冲之有重要贡献。其一，祖冲之提出了一种具有比较严格数学意义的测定冬至时刻的方法，此法一直沿用到明清时代。在与戴法兴就《大明历》进行辩论时，祖冲之介绍了他测定大明五年(461 年)十一月冬至时刻的方法。《宋书·律历志下》有记载："据大明五年十月十日，影长一丈七寸七分半。十一月二十五日，一丈八寸一分太。二十六日，一丈七寸五分强，折取其中，则中天冬至应在十一月三日。求其早晚，令后二日影相减，则一日差率也。倍之为法，前二日〔相〕减，以百刻乘之为实，以法除实，得冬至加时在夜半后三十一刻，在《元嘉历》后一日，天数之正也。"这里祖冲之使用了两条假设：(一)冬至前和冬至后影长变化的情况是对称的。即冬至前后离冬至时间间隔相同的两个时刻，它们的影长是相同的；(二)影长的变化在一天之内是均匀的。这两条假设，严格说来都有误差，但误差不大。特别是前一条，它的误差的产生是由于太阳视运动最快的那个地方(即太阳的近地点，也就是地球轨道近日点的正对面)，和冬至点并不重合，因而严格地说，冬至前与冬至后影长变化的情况是不相同的。但是，太阳近地点在祖冲之那个时代离冬至点不太远(相距约 13.5 度)，并且从长期来说，它是在缓慢地向着冬至点靠拢的。因而冬至前后影长变化接近于对称，并且越来越接近于对称。至于一天内影长的变化，从稍长的时间看，当然每天是不均匀的。但是就一天的范围来讲，把它当作均匀的，误差也不大。因为本来一天的影长变化本身就不太大。其二，祖冲

之在回归年数值上有重要贡献。他测定的回归年数值达到了很精密的程度。依照《大明历》的有关数据推算，祖冲之的1回归年为365.242 8日。这个数值要过七百多年之后才出现更为精密的。而在欧洲，在16世纪以前一直实行的儒略历中，回归年的数值是365.25日，其精度不如我国东汉刘洪的《乾象历》，更不用说祖冲之的了。

祖冲之治学严谨，实事求是，敢于创新。他不迷信纬候图谶，不虚推古人，其科学精神，深为后人敬仰。他反对踵古，认为古代一切理论都要加以核验。星球运行，“非出神怪，有形可验，有数可推”。为创作一部精密的历法，他辛勤奋力，“亲量圭尺，躬察仪漏，目尽毫厘，心穷筹策，考课推移，又曲备其详”。当他的新历法推行受到顽固守旧派的阻挠时，他坚持真理，不畏权贵，据理反驳。

在机械制造方面，祖冲之有许多发明。主要有：

(1)重造指南车。指南车是一种指示方向的机械装置，它联合应用了车轮、滑轮和各种齿轮，只要在车开始运动时将车上木人手指南方，其后“车虽回运而手掌指南”。有了这种机械装置，对于“地域平漫，迷于东西”者，可“使常知南北”并“以送荒外远使”。我国古代不少人成功地制造了指南车。传说早在西周、甚至黄帝时代已有指南车，但几度失传。宋武帝刘裕灭后秦时曾夺得后秦国皇帝姚兴的一辆指南车。这辆指南车据说是令狐生所造，但刘裕得到此车时，车内机械已经失灵，遂被废弃。60年后，齐王萧道成要求祖冲之重新造一辆指南车。祖冲之领命试造。与此同时，北方索驭驎声称也能造指南车，于是萧道成要索驭驎也造一辆，与祖冲之比一比。祖冲之改用铜制，经试验，性能良好。不论指南车如何运行，车上的木人之手方向始终指示正南方。两辆指南车在皇家乐游苑演示，萧道成亲自率众官员观看，结果祖冲之的指南车获胜。比赛结束，索驭驎十分不快，将自己的指南车

带回家中拆毁烧掉了。

(2)制造水碓磨。祖冲之曾在地方为官，深知农民用脚踏人力碓舂米之辛苦，便思考制造水碓，利用水力舂米。祖冲之帮助农家制成水碓，深受欢迎。后逐步推广。除用于舂米外，还被用于榨油、磨粉、碾茶、……。祖冲之曾根据齐武帝的指令在乐游苑制造了一座水碓磨，既能舂米，又能磨粉。齐武帝亲临视察，予以高度评价。

(3)造千里船。据《南史·祖冲之列传》记载：祖冲之“又造千里船，于新亭江试之，日行百余里。”新亭江就是建康西部长江靠东南的那一股。关于千里船的进一步情况，未见记载。

(4)造“施机自运”之器。祖冲之看到古书上有记载，说三国时诸葛亮作战时曾用“木牛”、“流马”来运输。受此启发，“乃造一器，不因风水，施机自运，不劳人力”(《南史·祖冲之列传》)。但此器究竟为何物，不得而知。

(5)做欹(yī)器。欹器是古代一种巧器。欹者，倾斜之意也。《荀子·宥坐》有云：“吾闻宥坐之器者，虚则欹，中则正，满则覆”。如用于盛水，则空时易倾便于打水，半满时自动扶正，全满又易覆，便于倒水。因此，古代常有人做个欹器放在座右，以便经常提醒自己，不要骄傲自满，因为“满则覆”。祖冲之时代，欹器的制作技术已失传，但齐武帝次子竟陵王萧子良喜好古玩，要求祖冲之为其做个欹器。祖冲之答应后，从《荀子》中受到启发，经一番研究和试验后，成功地做成了一只欹器。萧子良得到欹器，十分高兴。说其与周庙中的欹器一样。后来，其兄文惠太子萧长懋在东宫看到祖冲之的《大明历》，便向齐武帝建议采用施行，后因文惠太子夭折而又被搁置。

祖冲之博古通今，并忠于他的国家。他长期为官，在朝廷和地方都有工作经验，又能深入实际，体察民情。他曾担任长水校尉，写出《安边论》，向齐明帝萧鸾提出关于巩固国防的建议。他

强调：屯田垦殖，扩大耕地，安定边疆，建设边疆。他的建议得到齐明帝的赞赏。明帝考虑委派祖冲之巡行各地，提出进一步的建议，以利国家和百姓，但终因战事不断而未能成行。

第二节　对数学的贡献

祖冲之是我国历史上继刘徽之后的又一位伟大数学家。他在圆周率研究、同余式组以及二次与三次方程求解等方面都有杰出贡献。

一　“缀述”与《缀术》

祖冲之的数学成就，史书有明确记载，但其详细内容却因祖冲之《九章》注、“缀述”和《缀术》的失传而无法进一步全面获知。《南齐书》和《南史》都说祖冲之“注《九章》，造缀述数十篇”。《隋书·律历志》则说祖冲之“所著之书名为《缀术》”。《隋书·经籍志》记录“《缀术》六卷”但未注作者姓名，《旧唐书·经籍志》则有明确记载“《缀术》五卷，祖冲之撰”。由此可见，祖冲之确实为《九章算术》作过注，并写过“缀述”与《缀术》。那么，“缀述”与祖冲之注《九章》有什么联系？而“缀述”与《缀术》二者又是何种关系？我们认为，可能是祖冲之在深入研究《九章算术》及其刘徽注之后，认为数学还应该有所发展，便写成数十篇专题论文，附缀于刘徽注之后，因而谓之“缀述”。尔后，又可能以“缀述”为基础写成《缀术》一书。这一过程中可能还包括了祖冲之的儿子祖暅的一部分工作。因此，《缀术》可能体现了祖冲之父子的主要数学创造。

无疑，祖冲之的《九章》注，是对《九章》及其刘徽注的深化与发展，估计内容相当丰富而精采。祖冲之在就《大明历》进行辩论时，提到刘徽，说明他熟悉刘徽的工作，而且在刘徽的基

础上取得了一批更高水平的成果。在现传各本《九章算术》中均未留下“冲之按”之类字样，并且在祖冲之之后的数学文献里也未见任何人直接引用祖冲之注的内容。只有在《日本国见在书目》(公元9世纪)中有“《九章》九卷，祖中注。《九章术义》九卷，祖中注。”隋代有《九章术义序》一卷，未注撰者姓名(《隋书.经籍志三》)。是否为祖中注《九章术义》九卷之序？此“祖中”是“祖冲之”之误，还是另有他人？如果“祖中”确为“祖冲之”之误，那么可以认为，祖冲之对《九章》的注释并未写在刘徽的注释之后，而是另外单独写了一本。《日本国见在书目》中又有“刘徽注《九章》九卷”，便是一个有力的证据。

《缀术》是一本深奥的学术著作。《隋书·律历志》有记载：祖冲之“所著之书名为《缀术》，学官莫能究其深奥，是故废而不理。”这说明隋朝没有精通《缀术》之人。唐初王孝通曾读过《缀术》并作过评价。他的上《缉古算经表》说：“祖暅之《缀术》，时人称之精妙，曾不觉方邑进行之术全错不通，刍甍、方亭之问于理未尽。”这里有两种可能：一是《缀术》某些地方确有错误。另一种可能是王孝通未真正读懂《缀术》的全部。唐朝显庆元年(656年)国子监内始添明算科，学生研习算经12部：九章算术、海岛算经、孙子算经、五曹算经、张邱建算经、夏侯阳算经、周髀算经、五经算经、缀术、缉古算经、数术记遗、三等数，其中数术记遗和三等数为兼习。根据当时的教学安排，学生需花4年时间修习《缀术》，而《九章算术》连同《海岛算经》也仅修3年，充分说明《缀术》内容之丰富、学术水平之高。《缀术》还曾传到日本和朝鲜，那里当时的太学生需读此书。《日本国见在书目》中记有“缀术六”。但是，北宋元丰七年(1084年)所刻算经中没有《缀术》，表明那时《缀术》已经失传。由于《缀术》失传，其具体内容就很难详考。根据前面的讨论，我们认为，《缀术》的内容应当是与《九章算术》有关的问题，也可能有若干关于天文历法计算

方面的问题。

二　圆　周　率

我国古代，圆周率(π)有“周三径一”之古率(π=3)、西汉刘歆率(π=3.154 7)、东汉张衡率(π=$\sqrt{10}$)等，但这些都是经验值。直到三国时代刘徽，圆周率的计算才有严格的理论和完善的方法。而经过200年后，祖冲之则把圆周率近似值计算的精度推到时代的高峰。

(一)“正数”探源

据《隋书·律历志》记载，祖冲之推定圆周率π的“正数”(即准确值)在“盈”、“朒”二限之间，其中“盈”数3.141 592 7，“朒”数3.141 592 6. 即

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

但史书没有记载祖冲之是用什么方法得到这一结果的。

然而根据《九章算术》圆田术李淳风注：“径一周三，理非精密。盖术从简要，举大纲略而言之。刘徽特以为疏，遂乃改张其率。但周径相乘数难契合。徽虽出斯二法，终不能究其纤毫也。冲之以其不精，就中更推其数。今者修撰，捃摭诸家，考其是非，冲之为密”。

由于李淳风既是《九章算术》的注释者，又是《隋书·律历志》的主要编者，此两条资料是可以统一起来的。所以，祖冲之关于圆周率的研究是在刘徽工作的基础上进行的，他是运用刘徽割圆术得到“正数在盈朒二限之间”这一结果的。对此，阮元在《畴人传》刘徽传中也有论述：“徽创以六觚之面割之，又割以求周径相与之率。厥后祖冲之更开密法，仍是割之又割耳，未能于徽注之外，别立新术也”。

刘徽是我国第一代知名数学家。他在魏景元四年(263年)注《九章算术》时，对古率π=3很不满足，认为“径一周三”不是

圆周率，而只是圆内接正六边形的周率。于是创割圆术。他获得两项成果：

$$\pi\approx\frac{157}{50}=3.14,$$

$$\pi\approx\frac{3927}{1250}=3.141\,6。$$

200年之后，祖冲之研究了《九章算术》及刘徽注，认为刘徽的结果还不够精密，便取9位有效数字。他可能延续刘徽的工作，先考虑圆径 $D=2$ 丈，即半径1丈并取为1亿微，计算出圆内接6 144边形和正12 288边形的边长，从而得到(S_n 表示圆内接正 n 边形面积)：

$$S_{12\,288}=3.141\,592\,51\text{ 丈}^2,$$

$$S_{24\,576}=3.141\,592\,61\text{ 丈}^2。$$

代入刘徽不等式 $S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$，(其中 S 表示圆面积)有

$$3.141\,592\,61<S<3.141\,592\,61+(3.141\,592\,61-3.141\,592\,51),$$

即

$$3.141\,592\,61<S<3.141\,592\,71。$$

略去微位1，取得

$$3.141\,592\,6\text{ 丈}^2<S<3.141\,592\,7\text{ 丈}^2。$$

由“半周半径相乘得积步”这一命题知

$$6.283\,185\,2\text{ 丈}<L<6.283\,185\,4\text{ 丈},$$

其中 L 表示圆周长。于是

$$3.141\,592\,6<L:D<3.141\,592\,7。$$

故若取直径 $D=1$ 丈，则

$$3.141\,592\,6\text{ 丈}<L<3.141\,592\,7\text{ 丈}。$$

所以，《隋书·律历志》说：“以圆径一亿为一丈，圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正数在盈朒二限之间。”

祖冲之的这一成果保持了 900 多年的领先纪录。大约在公元 1427 年，伊斯兰学者阿尔·卡西(al-kāshi)求得圆周率值的前 16 位小数，才超过祖冲之。

(二)约率、密率估测

在祖冲之时代，由于还没有应用小数，因而在实际计算中圆周率常用分数来表示。祖冲之在得到圆周率正数的盈朒二限以后，又提出圆周率的两个分数形式的近似值：约率 $\pi_1=22/7$，密率 $\pi_2=355/113$。

《隋书·律历志》记载了祖冲之的这一成果，但未说明他是用何种方法得到的。我们认为，祖冲之可能是借助何承天的调日法求得这两个值的。

祖冲之迟于何承天 59 年，曾认真研究过何承天的《元嘉历》，对于何承天的调日法也是熟悉的。他研究置闰方法，认为旧法"十九年七闰"的闰数太多，经 200 年会差一日，遂提出改革闰法。他知道"十一年四闰"的闰数太少，故取 4/11 为弱率，又取 7/19 为强率，运用调日法得到

$$\frac{20\times7+4}{20\times19+11}=\frac{144}{391}。$$

于是定 391 年 144 闰。

祖冲之很有可能将这种方法用于圆周率近似值的推算。他已知圆周率的正数在盈朒二限之间，即

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

为取得 π 的分数形式近似表示，取 π 的不足近似值 3 为弱率，过剩近似值 4 为强率，则

由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{4}{1}$，取 $\pi_1=\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}=3.5$，比"正数"大，以为强率；

由 $\frac{3}{1}<\pi<\frac{7}{2}$，取 $\pi_2=\frac{3+7}{1+2}=\frac{10}{3}=3.333\cdots$，也比"正数"大，

以为强率；

由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{10}{3}$，取$\pi_3=\frac{3+10}{1+3}=\frac{13}{4}=3.25$，仍比“正数”大，以为强率；

……

由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{5\times3+4}{5\times1+1}=\frac{19}{6}$，取

$$\pi_6=\frac{6\times3+4}{6\times1+1}=\frac{22}{7}=3.142\ 857\ 142。$$

祖冲之称$\pi_6=22/7$为“约率”，这是一个过剩近似值。何承天所用圆周率也是22/7。

再以π_6为强率，由$\frac{3}{1}<\pi<\frac{22}{7}$，取

$$\pi_7=\frac{3+1\times22}{1+1\times7}=\frac{25}{8}=3.125。$$

π_7小于“正数”，以为弱率；

由$\frac{25}{8}<\pi<\frac{22}{7}$，取

$$\pi_8=\frac{25+22}{8+7}=\frac{3+2\times22}{1+2\times7}=\frac{47}{15}=3.133\ 3\cdots。$$

π_8也小于“正数”，故以为弱率；

……

由$\frac{3+15\times22}{1+15\times7}<\pi<\frac{22}{7}$，取

$$\pi_{22}=\frac{3+16\times22}{1+16\times7}=\frac{355}{113}=3.141\ 592\ 924\ 4。$$

祖冲之谓此$\pi_{22}=355/113$为“密率”，这是祖冲之的一项重要创造。如化作小数，π_{22}与“正数”有6位小数相合。在欧洲，有人称圆周率的这个近似值为“安东尼兹率”。然而事实上，安东尼兹迟于祖冲之1 100年。因此，日本数学史学家三上义夫在公元1912年提出应称$\pi=355/113$为“祖率”，这是公正的。

日本数学家关孝和在《括要算法》第二卷诸约术中设有零约术，其实质即何承天调日法，关孝和用以求圆周率的近似分数。在得到小数表示的定周 3.141 592 653 589 793 238 4 后，他从

$$\frac{3}{1}<3.141\,592\,653\,589\,793\,2<\frac{4}{1}$$

开始，做六次零约术，得到祖冲之“约率”22/7；做 49 次零约术，得到“徽率”157/50；做 112 次零约术得到祖冲之“密率”355/113。兹摘录其部分结果如下表：

	周率	径率	周　数
古　法	3	1	3
	7	2	3.5
	10	3	3.333…
	……		
约　率	22	7	3.142
智　率	25	8	3.125
	……		
桐陵法	63	20	3.15
	……		
和古法	79	25	3.16
	……		
陆绩率	142	45	3.155 5
	……		
徽　率	157	50	3.14
	……		
密　率	355	113	3.141 592 924 4

上述关孝和求圆周率工作，无疑为我们提供了祖冲之约率、密率推导可能用调日法这一估测的旁证材料。

三　开差幂与开差立

《隋书・律历志》在叙述了祖冲之圆周率方面的成就后又说：

“又设开差幂、开差立，兼以正负（‘负’字各本误为‘圆’，今依钱宝琮改之）参之。指要精密，算氏之最者也”。据此，祖冲之研究过系数出现负数的二次与三次方程求正根问题，并提出了具体方法，谓之“开差幂”、“开差立”。这种方法，可能类似于后来的“正负开方术”。

开方的代数意义即解方程。从《九章算术》记载的开方程序看，开平方过程中包含了开带从平方。同样，在开立方的过程中则包含了开带从立方。因此，开平方法可以推广到解一般的正系数二次方程，开立方法则可以推广到解一般的正系数三次方程。

事实上，《九章算术》及其刘徽注和《周髀算经》赵爽注中都出现了二次方程求解的实例。形如

$$x^2+Ax=B，其中 A，B>0$$

的方程，称其中一次项系数 A 为“从法”，常数项 B 为“实”。解此方程，即开带从平方。而且，赵爽与刘徽虽为同代之人但却各居异地，彼此独立完成各自著述，表明当时对于开带从平方问题已是普遍之事。换言之，在赵爽刘徽时代，中算家已完全能解正系数二次方程了。

再由《九章算术》开立方术及《张邱建算经》卷下 30 题，我们可以认为，当时对于正系数三次方程也基本能解。

然而，当时也有导致方程系数出现负数的问题，却因带从开方不可施行而只能用别的方法去解决。在《周髀算经》赵爽勾股圆方图注和《九章算术》勾股章第 11 题刘徽注中，论及同一问题，即属此类。

赵爽注：“其倍弦为广袤合，令勾股见者自乘为其实，四实以减之，开其余，所得为差，以差减合，半其余为广，减广于倍弦，即所求也。”

刘徽注：“其倍弦为广袤合，勾自乘为幂，得广即股弦差。”

赵、刘的问题可用现代术语简述于下。已知：长方形面积为

A，长宽之和为 k。求：长、宽。

如图 3.2.1，在大正方形 k^2 内，减去四个长方形 $4A$ 后，所余为长宽差的平方。开平方则得长宽之差。和与差相减折半即得宽，再由和内减去宽可得长。所以宽为 $\frac{1}{2}(k-\sqrt{k^2-4A})$，长为 $\frac{1}{2}(k+\sqrt{k^2-4A})$。

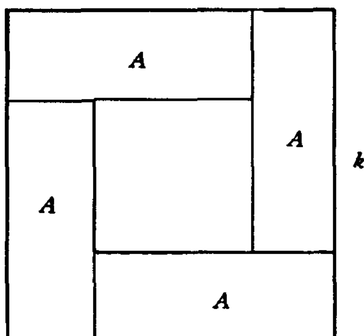


图 3.2.1

若用代数符号表达，设宽为 x，则

$$x(k-x)=A,$$

$$-x^2+kx=A。$$

这表明，当时已出现了一些特殊的含有负系数的二次方程问题。

进一步，如果已知长方体的体积及长宽高之和，要求其长、宽、高，那么就会出现含有负系数的三次方程。设长方体体积为 V，宽为 x，长为 $k-x$，高是 $l-x$，则有

$$x^3-(l+k)x^2+klx=V。$$

祖冲之读过《九章算术》及其刘徽注，很可能研究了类似于上述含有负系数二次方程和三次方程的问题。他运用《九章算

术》及其刘徽注关于正负数的理论与运算法则，创立“开差幂”和“开差立”，以取代“开带从开方”和“开带从立方”，从而正系数二次和三次方程解法推广为一般二次和三次方程解法。

虽然我们无法看到祖冲之“开差幂”和“开差立”的具体方法，但解决一般二次和三次方程求正根问题，确实是件伟大的创作。所以《隋书·律历志》称赞其“指要精密，算氏之最者也”。

十分可惜的是，祖冲之的这一创作极其深奥，一度没人能弄懂，因而失传。恰如《隋书·律历志》所说：“学官莫能究其深奥，是故废而不理”。一直到唐初，王孝通对祖冲之这种含有负项的开方法仍不理解，反而错误地批评道：“祖暅之缀术，时人称之精妙，曾不觉方邑进行之术全错不通，刍甍、方亭之问于理未尽”。因此，王孝通对方程的研究，仍停留于正系数的情形。当然，他通过《缉古算经》介绍开带从立方(求三次方程的正根)，解决了工程上的大量问题，成就是辉煌的。

祖冲之后 700 年，刘益重新研究含有负系数的方程，并提出解二次方程的“益积”开方和“减从”开方两种方法，施于一般形式的二次、三次和四次方程。刘益的工作载于《议古根源》，可惜此书也失传。幸而部分被杨辉编入《田亩比类乘除捷法》，今可窥见一斑。后来，13 世纪秦九韶集前人数值解方程知识之大成，提出“开方正负损益之法”即“正负开方术”，彻底解决了任意次实系数多项式方程正根数值解问题。

四 同余式组

(一)上元积年与同余式

陈遵妫先生所著《中国天文学史》(上海人民出版社，1984年)指出：“古人治历的基本观念，首先注重历元，一定要以甲子那天恰好是夜半朔旦冬至，作为起算的开始。古人于历元之外，还要求日月合璧、五星联珠定为上元，于是还要推算七政的周期，使

它们同时发生于上元，作为出发的始点，起算的开端。”由上元到所求年的累计年数称为上元积年，相应地还有上元积月、上元积日等。

从西汉末年刘歆改太初历(前104年)为三统历开始，即有这些概念。

三统历以19年为1章，以81章为1统，以3统为1元(4 617年)。1元乃朔旦、冬至、甲子日之公共周期。又据《汉书·律历志》“汉历太初元年……前十一月甲子朔旦冬至，岁在星纪婺女六度”。既然太初元年前十一月甲子、朔旦、冬至会合，假设上元至太初元年积N年，则

$$N=4\,617P\text{，其中 }P\text{ 是整数。}$$

古代以岁星(今称木星)纪年，岁星12年行一周天，分周天为12次，则岁星每年行一次。三统历以岁星144年超一次，即144年行145次。于是在$N=4\,617P$年内，岁星运行$4\,617P\cdot\frac{145}{144}$次而至星纪婺女6度。因此，若以12除之，则余数应恰在婺女六度处。按当时规定，婺女6度相当于一次的$\frac{28}{30}\sim\frac{29}{30}$，化作以144为母之分数，约$\frac{135}{144}\sim\frac{139}{144}$次，因此

$$4\,617P\cdot\frac{145}{144}=12\cdot q+\frac{r}{144}(135\leqslant r\leqslant 139),$$

即

$$4\,617\times 145P\equiv r(\mathrm{mod}\ 1\,728)。$$

上式仅当$r=135$时才有解且$P=31$，将此代入，求得

$$N=4\,617\times 31=143\,137。$$

适与《汉书·律历志》“世纪”所记三统历上元积年数相合。

这时，日、月、木星都在共同起点——甲子日夜半。进一步，三统历还要求日月合璧、五星联珠：“五星会终，触类而去之，以乘章岁，为二百六十二万六千五百六十，而与日月合”。由三统历

测得五星运行周期木、火、土、金、水分别为1 728，13 824，4 320，3 456，9 216年，其最小公倍数为138 240年。以章岁19乘之：

$$19\times 138\ 240=2\ 626\ 560,$$

即“会元”，一会之后，日月五星齐同。以三会之数与元法求最小公倍数得23 639 040年为一“太极上元”，经这样一个太极上元，冬至、朔旦、甲子与日月五星同起于此。

这表明，汉代天文学家已通过求最小公倍数和解一次同余式来推算上元积年。

随着天文实测精度的提高，推算上元积年的方法发展为解同余式组。如3世纪魏《景初历》规定以冬至、朔冬与甲子日子正会合之时为历元，其上元积年的推算相当于解同余式组

$$aN\equiv r_1 \pmod{60} \equiv r_2 \pmod{b},$$

其中a是一回归年日数，b是一朔望月日数，r_1为观测年冬至点与甲子日子正之距离，r_2为冬至与当年十一月平朔之距离。

综上所述，我国古代关于一次同余式问题的研究，实始于汉代天文学家关于上元积年的推算。

(二)祖冲之《大明历》上元积年之推算

祖冲之造《大明历》，其上元为甲子年甲子日朔夜半冬至，并且是恒星年、木、火、土、金、水五星及近点月、交点月之公共起点：“上元之岁，岁在甲子，天正甲子朔夜半冬至，日月五星，聚于虚度之初，阴阳迟疾，并自此始。”

可惜的是，祖冲之大明五年(461年)所测一系列数据未见记载。但是我们可以按照祖冲之历法推求当时日月五星的起点所在，从而推测祖冲之当年计算上元积年的办法，并窥测他在同余式方面的研究方法。

记上元积年N：上元→大明五年十一月冬至；上元积日n：上元→大明五年十一月朔子正。

①查大明五年十一月初一(朔)为癸未，距甲子日19日，于是

$n\equiv 19 \pmod{60}$。

②已知：1 朔望月$=29\frac{2\ 090}{3\ 939}$日，由“推朔术”，朔积日有“小余”1 983，即合朔发生在子正后$\frac{1\ 983}{3\ 939}$日，故

$$n+\frac{1\ 983}{3\ 939}\equiv 0(29\frac{2\ 090}{3\ 939})=0(\mathrm{mod}\ \frac{116\ 321}{3\ 939})。$$

③已知：1 回归年$=365\frac{9\ 589}{39\ 491}$日，由“推二十四气术”，冬至距甲子日 21 日，且有“小余”12 481，因此冬至距十一月朔子正$2\frac{12\ 481}{39\ 491}$日（即 2.316 046 694 日≈2.31 日[①] 这与祖冲之跟戴法兴辩论时所说，测得大明五年冬至在十一月初三日子正后三十一刻，是相合的）。故

$$n+2\frac{12\ 481}{39\ 491}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 365\frac{9\ 589}{39\ 491})\equiv 0(\mathrm{mod}\ \frac{14\ 423\ 804}{39\ 491})。$$

④查大明五年为辛丑年，这一年的冬至为壬寅年之始，距宋少帝景平二年（424 年）甲子年起点冬至有 38 年。故

$$(n+2\frac{12\ 481}{39\ 491})/365\frac{9\ 589}{39\ 491}\equiv 38(\mathrm{mod}\ 60)。$$

⑤已知：1 恒星年$=365\frac{10\ 449}{39\ 491}$日，由“推日所在度术”，有“积度”327，“度余”26 956。即日距虚宿[②] $327\frac{26\ 956}{39\ 491}$度[③]。故

$$n\equiv 327\frac{26\ 956}{39\ 491}(\mathrm{mod}\ 365\frac{10\ 449}{39\ 491})。$$

⑥因木率 15 753 082，火率 30 804 196，土率 14 930 354，金

---

① 当时是“六舍七入”。

② 虚宿：星官名。二十八宿北方玄武七宿中的第四宿，位于七宿之正中。这里祖冲之以虚宿初度为日运动的起始点。

③ 度：古代历算家规定太阳日行一度。如太阳运动一恒星年就是 $365\frac{10\ 449}{39\ 491}$度。

率 23 060 014，水率 4 576 204，即知五星运行周期分别是 $398\frac{35\ 664}{39\ 491}$日、$780\ \frac{1\ 216}{39\ 491}$日、$378\ \frac{2\ 756}{39\ 491}$日、$583\ \frac{36\ 761}{39\ 491}$日、$115\frac{34\ 739}{39\ 491}$日，由“推五星术”，木、火、土、金、水五星“入岁日”分别为 256，369，50，183，102，“日余”分别是 17 207，33 852，27 065，7 276，7 049，即各星距起始点的日数分别有

木星：$398\frac{35\ 664}{39\ 491}-256\frac{17\ 207}{39\ 491}=142\frac{18\ 457}{39\ 491}$日，

火星：$780\frac{1\ 216}{39\ 491}-369\frac{33\ 852}{39\ 491}=410\frac{6\ 855}{39\ 491}$日，

土星：$378\frac{2\ 756}{39\ 491}-50\frac{27\ 065}{39\ 491}=327\frac{15\ 182}{39\ 491}$日，

金星：$583\frac{36\ 761}{39\ 491}-183\frac{7\ 276}{39\ 491}=400\frac{29\ 485}{39\ 491}$日，

水星：$115\frac{34\ 739}{39\ 491}-102\frac{7\ 049}{39\ 491}=13\frac{27\ 690}{39\ 491}$日。

所以

$$\begin{aligned}n &\equiv 142\frac{18\ 457}{39\ 491}\left(\bmod 398\frac{35\ 664}{39\ 491}\right)\\ &\equiv 410\frac{6\ 855}{39\ 491}\left(\bmod 780\frac{1\ 216}{39\ 491}\right)\\ &\equiv 327\frac{15\ 182}{39\ 491}\left(\bmod 378\frac{2\ 756}{39\ 491}\right)\\ &\equiv 400\frac{29\ 485}{39\ 491}\left(\bmod 583\frac{36\ 761}{39\ 491}\right)\\ &\equiv 13\frac{27\ 690}{39\ 491}\left(\bmod 115\frac{34\ 739}{39\ 491}\right)。\end{aligned}$$

⑦已知：1 近点月$=27\frac{14\ 631}{26\ 377}$日，由“推迟疾历术”，“入历日”9，“日余”7 810，于是 $9\frac{7\ 810}{26\ 377}$日“入历”，即距起始点 $9\frac{7\ 810}{26\ 377}$日，故

$$n\equiv 9\frac{7\ 810}{26\ 377}\left(\bmod\ 27\frac{14\ 631}{26\ 377}\right)。$$

⑧已知：1 交点月$=27\frac{5\ 598}{26\ 377}$日，由“推阴阳历术”，“入阳历分”176 059，“入历日”6，“日余”17 797，于是$6\frac{17\ 797}{26\ 377}$日“入阳历”，即距起始点$6\frac{17\ 797}{26\ 377}$日。故

$$n\equiv 6\frac{17\ 797}{26\ 377}\left(\bmod\ 27\frac{5\ 598}{26\ 377}\right)。$$

整理后可得 12 个同余式：

甲子年	$39\ 491n\equiv 548\ 013\ 089(\bmod\ 865\ 428\ 240)$，
甲子日	$n\equiv 19(\bmod\ 60)$，
回归年	$39\ 491n\equiv 14\ 332\ 341(\bmod\ 14\ 423\ 804)$，
朔望月	$3\ 939n\equiv 114\ 338(\bmod\ 116\ 321)$，
恒星年	$39\ 491n\equiv 12\ 940\ 513(\bmod\ 14\ 424\ 664)$，
木　星	$39\ 491n\equiv 5\ 626\ 179(\bmod\ 15\ 753\ 082)$，
火　星	$39\ 491n\equiv 16\ 198\ 165(\bmod\ 30\ 804\ 196)$，
土　星	$39\ 491n\equiv 12\ 928\ 739(\bmod\ 14\ 930\ 354)$，
金　星	$39\ 491n\equiv 15\ 825\ 885(\bmod\ 23\ 060\ 014)$，
水　星	$39\ 491n\equiv 541\ 073(\bmod\ 4\ 576\ 204)$，
近点月	$26\ 377n\equiv 245\ 203(\bmod\ 726\ 810)$，
交点月	$26\ 377n\equiv 176\ 059(\bmod\ 717\ 777)$。

分别解之[①]，可以得到

$$\begin{aligned} n &\equiv 18\ 969\ 979(\bmod\ 865\ 428\ 240)\\ &\equiv 19(\bmod\ 60)\\ &\equiv 4\ 546\ 175(\bmod\ 14\ 423\ 804)\\ &\equiv 9\ 656(\bmod\ 116\ 321)\end{aligned}$$

① 后一节将专题论述。

$\equiv 4\ 545\ 315 \pmod{14\ 424\ 664}$

$\equiv 3\ 216\ 897 \pmod{15\ 753\ 082}$

$\equiv 18\ 969\ 979 \pmod{30\ 804\ 196}$

$\equiv 4\ 039\ 625 \pmod{14\ 930\ 354}$

$\equiv 18\ 969\ 979 \pmod{23\ 060\ 014}$

$\equiv 665\ 163 \pmod{4\ 576\ 204}$

$\equiv 72\ 919 \pmod{726\ 810}$

$\equiv 307\ 777 \pmod{717\ 777}$。

为方便，将它们记作

$$n \equiv r_k \pmod{m_k} \qquad (k=1,2,\cdots,12)。$$

并且按照 r_k 的大小重新排列，即令

$$r_k \leqslant r_{k+1} \qquad (k=1,2,\cdots,11)。$$

在时间坐标上(如图 3.2.2)，设 P 点为大明五年十一月朔夜半子正，则在 P 点的左边可依次得到 R_1，R_2，…，R_{12}，使得

$$\overline{R_kP} = r_k \qquad (k=1,2,\cdots,12)。$$



图 3.2.2

于是 R_1，R_2，…，R_{12}分别是甲子日、朔望月、近点月、交点月、水星、木星、土星、恒星年、回归年、金星、火星和甲子年的起始点。

首先，注意到 R_{10}，R_{11}，R_{12}三点重合，表明金星、火星和甲子年有相同的起始点 R_{10}；

其次，容易发现

$$m_6+r_6=m_7+r_7=m_8+r_8=m_9+r_9=r_{10}。$$

表明木星、土星和恒星年、回归年也都是以 R_{10}为共同的起始点；

进一步，还可发现

$$r_1+316\ 166m_1=r_2+163m_2=r_3+26m_3$$
$$=r_4+26m_4=r_5+4m_5=r_{10}。$$

说明甲子日、朔望月、近点月、交点月和水星也都是以R_{10}为公共起始点。

因此，R_{10}是甲子年、甲子日、回归年、恒星年、朔望月、近点月、交点月和木、火、土、金、水五星的公共起始点。也就是说，R_{10}为上元。从而得到

$$n=18\ 969\ 979。$$

即从上元到大明五年十一月朔夜半有积日 18 969 979 日。于是自上元至大明五年十一月冬至积年数为：

$$N=(18\ 969\ 979+2\frac{12\ 481}{39\ 491})/365\frac{9\ 589}{39\ 491}$$
$$=\frac{39\ 491\times18\ 969\ 981+12\ 481}{14\ 423\ 804}$$
$$=51\ 938\text{ 年}。$$

所以，《大明历》头一条云：“上元甲子至宋大明七年癸卯，五万一千九百三十九年算外[①]”。

值得注意的是，前述由形如

$$n\equiv r_k(\mathrm{mod}\ m_k)$$

的 12 个同余式而得到上元积日数 $n=18\ 969\ 979$，乃因数据特殊而很快得到解决。但对于其他一般形如

$$x=r_i(\mathrm{mod}\ m_i)\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

的同余式组，祖冲之是否已经发现了普遍适用的求解方法，仍然是一个谜。

(三)更相减损术与同余式解法

我们看到，在《三统历》和《景初历》等历法中，已有关于

① 算外：指所求年当年不计。如这里就不包括大明七年癸卯。

求解一次同余式(组)的问题，而祖冲之《大明历》中则有关于解12个同余式组的问题，并且其数据十分复杂。于是，我们不能不认为，到祖冲之时代我们的先贤们已经找到了求解一次同余式的初步方法。

这种方法，可能是以更相减损术为基础的。《九章算术》约分术曰“可半者半之，不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之”。这里的“等数”即最大公约数。对此原理，刘徽注给出证明“等数约之，即除也。其所以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之”。

值得注意的是，约分的最终目的不在于求等数，而是要求得分母、分子中所含等数之倍数。因此，可以在求出等数后再求分母分子中含等数之倍数，也可以在求得等数的过程中，同时求出分母、分子中各含等数之倍数。前者就是约分术，而后者古代也是有过的。

《汉书·律历志》卷下载《三统历》关于木、火、土、金、水五星与日会合周期之测算，有所谓“通其率”算法。以木星为例，其运行情况如下：

	木行	日行
顺	22°	121°
留	0°	25°
逆	−12°	84°
复留	0°	24°3′
复顺	20°1 661 286′	111°1 828 362′
伏	3°1 673 451′	33°3 334 737′
一见	33°3 334 737′	398°5 163 102′

其中 1°=7308711′，于是

$$木星日行度=\frac{33°3\ 334\ 737'}{398°5\ 163\ 102'}。$$

由此，《汉书·律历志》接着说“通其率，故曰日行千七百二十八分之百四十五”，即木星日行度为$\frac{145}{1\ 728}$。

事实上，对于 398°5 163 102′，33°3 334 737′施以更相减损术：

11	398°5 163 102′	33°3 334 737′	1
	368°138 552′	30°5 024 550′	
11	30°5 024 550′	2°5 618 898′	11
	30°3 338 190′	2°3 932 538′	
	1 686 360′	1 686 360′	

得到“等数”1 686 360′。“等数除之”可得既约分数：木星日行度为$\frac{145}{1\ 728}$。但也可不用除法而用乘法。注意到由更相减损同时产生一组率$(q_1,q_2,q_3,q_4)=(11,1,11,11)$。作如下换算：

令

$e_1=1$，$c_1=q_1=11$；

$e_2=q_2=1$，$c_2=q_2q_1+1=12$；

$e_3=q_3e_2+e_1=11\times1+1=12$，

$c_3=q_3c_2+c_1=11\times12+11=143$；

$e_4=q_4e_3+e_2=11\times12+1=133$，

$c_4=q_4c_3+c_2=11\times143+12=1\ 585$。

则

$$\frac{e_3+e_4}{c_3+c_4}=\frac{12+133}{143+1\ 585}=\frac{145}{1\ 728},$$

即是既约分数，其中 145 是 33°3 334 737′中含 1 686 360′的倍数，1 728 是 398°5 163 102′中含 1 686 360′的倍数。

上述(q_1,q_2,q_3,q_4)可以认为是“其率”，而求(e_1,e_2,e_3,e_4)和(c_1,c_2,c_3,c_4)的过程类似于“通分纳子”，故这种方法称为“通其率”。

这种思想方法出现于历法之中，因而容易被运用于历法中关

于同余式的问题。一般地，对于同余式

$$ax \equiv r \pmod{b}, \qquad (*)$$

不妨设 $a<b$，$r<b$，$(a,b)=1$．对 a，b 施以更相减损术：

$$b=q_1 a+r_1,$$

$$a=q_2 r_1+r_2,$$

$$r_1=q_1 r_2+r_3,$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_{n-3}=q_{n-1} r_{n-2}+r_{n-1},$$

$$r_{n-2}=q_n r_{n-1}+r_n,$$

$$r_{n-1}=r_n=1,$$

得到一组率 $(q_1,q_2,\cdots,q_n)$。

考虑用 q_i 表示 a，b，则

$$\begin{aligned}
b &= q_1 a+r_1 \\
&= q_1(q_2 r_1+r_2)+r_1 \\
&= (1+q_1 q_2)r_1+q_1 r_2 \\
&= c_2 r_1+c_1 r_2 \qquad (c_2=1+q_1 q_2, c_1=q_1) \\
&= c_2(q_3 r_2+r_3)+c_1 r_2 \\
&= (c_2 q_3+c_1)r_2+c_2 r_3 \\
&= c_3 r_2+c_2 r_3 \quad (c_3=c_2 q_3+c_1) \\
&\cdots\cdots \\
&= c_n r_{n-1}+c_{n-1} r_n \quad (c_n=q_n c_{n-1}+c_{n-2}) \\
&= c_{n-1}+c_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= q_2 r_1+r_2 \\
&= q_2(q_3 r_2+r_3)+r_2 \\
&= (1+q_2 q_3)r_2+q_2 r_3 \\
&= e_3 r_2+e_2 r_3 \quad (e_3=1+q_2 q_3, e_2=q_2) \\
&= e_3(q_4 r_3+r_4)+e_2 r_3 \\
&= (e_3 q_4+e_2)r_3+e_3 r_4
\end{aligned}$$

$=e_4r_3+e_3r_4 \quad (e_4=e_3q_4+e_2)$

……

$=e_nr_{n-1}+e_{n-1}r_n \quad (e_n=q_ne_{n-1}+e_{n-2})$

$=e_{n-1}+e_n$。

再记 $e_1=1$，可得递推公式：

$$c_k=q_kc_{k-1}+c_{k-2},$$

$$e_k=q_ke_{k-1}+e_{k-2},\ k\geqslant 3。$$

注意到(*)等价于

$$ax-tb=r,\ t\text{ 为整数。}$$

作

$$c_na-e_nb=(c_ne_n+c_ne_{n-1})-(e_nc_n+e_nc_{n-1})$$

$$=c_ne_{n-1}-e_nc_{n-1}。$$

当 n 为偶数，有 $c_na-e_nb=1$。从而 $(rc_n)a-(re_n)b=r$。于是 $x\equiv c_nr \pmod b$ 是(*)的解。

当 n 为奇数，有 $c_na-e_nb=-1$，或 $(b-c_n)a-(a-e_n)b=1$。因而 $r(b-c_n)a-r(a-e_n)b=r$。得到 $x\equiv r(b-c_n) \pmod b$ 是(*)的解。

祖冲之可能掌握了这种方法，从而解决了如此复杂的同余式问题。例如，对于《大明历》上元积日的 12 个同余式之一(恒星年)

$$39\,491n\equiv 12\,940\,513 \pmod{14\,424\,664},$$

可仿此方法解之。

先对 39 491 和 14 424 664 进行更相减损术。

3	39 491	14 424 664	365
	31 347	14 414 215	
3	8 144	10 449	1
	6 915	8 144	
1	1 229	2 305	1
	1 076	1 229	
30	153	1 076	7
	150	1 071	
1	3	5	1
	2	3	
	1	2	1
		1	
		1	

得到一组率(365,3,1,3,1,1,7,30,1,1,1)

$c_1=365$,

$c_2=3\times365+1=1\ 096$,

$c_3=1\times1\ 096+365=1\ 461$,

$c_4=3\times1\ 461+1\ 096=5\ 479$,

$c_5=1\times5\ 479+1\ 461=6\ 940$,

$c_6=1\times6\ 940+5\ 479=12\ 419$,

$c_7=7\times12\ 419+6\ 940=93\ 873$,

$c_8=30\times93\ 873+12\ 419=2\ 828\ 609$,

$c_9=1\times2\ 828\ 609+93\ 873=2\ 922\ 482$,

$c_{10}=1\times2\ 922\ 482+2\ 828\ 609=5\ 751\ 091$,

$c_{11}=1\times5\ 751\ 091+2\ 922\ 482=8\ 673\ 573$;

$e_1=1$,

$e_2=3$,

$e_3=1\times3+1=4$,

$e_4=3\times4+3=15$,

$e_5=1\times15+4=19$,

$e_6=1\times19+15=34$,

$e_7=7\times34+19=257$,

$e_8=30\times257+34=7\ 744$,

$e_9=1\times7\ 744+257=8\ 001$,

$e_{10}=1\times8\ 001+7\ 744=15\ 745$,

$e_{11}=1\times15\ 745+8\ 001=23\ 746$。

所以有

$$23\ 746\times14\ 424\ 664-8\ 673\ 573\times39\ 491=1,$$

或者

$$5\ 751\ 091\times39\ 491-15\ 745\times14\ 424\ 664=1。$$

于是

$$12\ 940\ 513\times5\ 751\ 091\times39\ 491-12\ 940\ 513\times15\ 745\times14\ 424\ 664=12\ 940\ 513,$$

$$74\ 422\ 067\ 849\ 683\times39\ 491-203\ 748\ 377\ 185\times14\ 424\ 664=12\ 940\ 513,$$

$$4\ 545\ 315\times39\ 491-12\ 443\times14\ 424\ 664=12\ 940\ 513。$$

因此，

$$n\equiv4\ 545\ 315\pmod{14\ 424\ 664}$$

是

$$39\ 491n\equiv12\ 940\ 513\pmod{14\ 424\ 664}$$

的解。

上述关于一次同余式的解法，后来发展成为“大衍求一术”，南宋秦九韶在《数书九章》中有系统阐述。

应当指出，我国古代关于同余式问题的研究，由于上元积年

推算的需要而得到较早的发展，同时又由于古代历法为神秘主义色彩长期笼罩而难以传播。因此，同余式理论是在迂回曲折中前进的。

第三章　祖　　暅[1]

第一节　身世与事迹

祖暅，字景烁，祖冲之之子，一位杰出的数学家和天文学家。祖暅的生卒年代无可查考，但其生活大致应在南齐及以后的梁朝，而其科学研究工作则主要是在梁初。

祖暅出身于书香门第，自幼聪颖，勤奋好学。他“少传家业，究极精微，亦有巧思”（《南史》祖冲之传）。《南史》（卷七十二）这样评价他：“人神之妙，般、倕无以过也。”当他钻研问题的时候，连外面打雷都听不见，在街上走路时也在思考，甚至撞到别人身上，被呼之才知道。《南史》（卷七十二）特地记载了一事“尝行遇仆射徐勉，以头触之，勉呼乃悟”。

祖暅子承父业，因而也精通天文历算。祖冲之去世后不久，齐朝灭亡，梁朝建立。祖暅于梁天监三年(504 年)上书梁武帝萧衍，指出当时所行历法之缺点，建议启用他父亲祖冲之所撰《大明历》，以纠正何承天《元嘉历》的疏远，但未被采纳。五年后的天监八年，祖暅再次建议改历。经太史令等实测天象，考验新旧历法的得失之后，梁武帝乃颁诏于天监九年(510 年)起，用《大明历》推算历书。在此过程中，祖暅除了对《大明历》积极推荐之外，还对《大明历》做过修改论证，使之更为完善。《南史》（卷七十二)有记载：“梁天监初，暅之更修之，于是始行焉。”祖暅实测北辰纽星去极的度数，证实了岁差现象的存在。他还在嵩山(今

[1] 编者按：《隋书》、《南史》、《畴人传》均称“暅之”，今人多称“暅”。

河南省登封县境内)上建立八尺铜表，作为日晷，下面与圭相连，圭上有沟，用水来定“水平”。祖暅曾抄集古代星象记录，撰《天文录》30 卷及《天文录经要诀》，著《漏刻经》一卷和《权衡记》等，但都已失传。

祖暅曾长期在梁朝为官，担任过员外散骑常侍、太舟卿、材官将军、南康太守等，但关于祖暅最后的官职，无法论断。《南史》说祖暅“位至太舟卿”，颜之推《颜氏家训》杂艺篇说祖暅“位至南康太守”。

祖暅有一段坎坷的人生之路。梁天监十二年(513 年)，南梁与北魏有战事。魏降将王足向梁高祖(武帝)献计，建议在淮河上筑所谓浮山堰，以水灌没被北魏占去的寿阳城(今安徽省寿县)。王足还引了北方童谣一首“荆山为上格，浮山为下格，潼沱为激沟，併灌钜野泽。”“高祖以为然”(《梁书》卷十八)，乃决定采纳王足的建议。随后，即命“水工”陈承伯和“材官将军”祖暅前往考察。考察结果，据《梁书》(卷十八)载：陈、祖“咸谓淮内沙土漂轻，不坚实，其功不可就。高祖弗纳，发徐、杨人，率二十户取五丁以筑之。假绚(即康绚，字长明)节、都督淮上诸军事，并护堰作，役人及战士，有众二十万。”陈承伯、祖暅等只好从命。他们想了许多办法，用了一年半时间总算把浮山堰筑成。“十五年四月，堰乃成。其长九里，下阔一百四十丈，上广四十五丈，高二十丈，深十九丈五尺。”(《梁书》卷十八康绚传)嗣后浮山堰即被用于军事，果然魏军溃退。但两岸数百里范围内变成汪洋一片，老百姓因此遭殃。《梁书》(卷十八)有云：“水之所及，夹淮方数百里地。”天监十五年(516 年)秋天，连降大雨，淮水暴涨，新筑成的浮山堰崩溃，下游老百姓死伤无数。结果，梁武帝把这场灾难归罪于工程负责人，祖暅因此被关进监狱。

刑满释放后，祖暅在豫章王萧综(梁武帝之子)处做事。公元525 年，萧综在彭城(今江苏省徐州市)失利于魏。祖暅与江革等一

起被魏方拘执于徐州魏安丰王元延明处，次年又一起被送回南朝。此间，由于祖暅为江南著名学者，在科学家信都芳的建议下，元延明礼待祖暅。后来，祖暅向信都芳传授天文历算之术，并相互进行学术交流。《北史》卷八十九信都芳传载："有江南人祖暅者，先于边境被获，在延明家，旧明算历，而不为王所待。芳(即信都芳)谏王礼遇之。暅(祖暅)后还，留诸法授芳，由是弥复精密。"祖暅还曾为元延明制作欹器、漏刻铭。

祖暅的儿子祖皓，也精通天文历算，且能文能武。《南史》卷七十二载："暅之子皓，志节慷慨，有文武才略。少传家业，善算历。大同中为江都令，后拜广陵太守。"在一次武装叛乱中，祖皓组织反击失利，因而遭遇酷刑之害。《南史》(卷七十二)这样描写："城陷，皓见执，被缚射之，箭遍体，然后车裂以徇。"

第二节　对数学的贡献

祖暅是他所处时代江南最著名的数学家。北齐颜之推(531～582)《颜氏家训》卷七杂艺篇有评论："算术亦是文艺要事，自古儒士，论天道、定律历者，皆学通之。然可以兼明，不可以专业。江南此学殊少，唯范阳祖暅精之，位至南康太守，河北多晓此学。"关于祖暅在数学方面的成就，一些史料中提到"祖暅的《缀术》"。于是就产生一个问题：祖暅的《缀术》与祖冲之的《缀术》关系如何？我们认为，可能是祖暅整理了其父祖冲之的数十篇"缀述"而写成《缀术》一书，并以祖冲之名义发表，也可能是祖暅对祖冲之生前已完成的《缀术》进行过修订。但《缀术》中必定含有祖暅的贡献，并体现其数学创造。可惜的是，《缀术》失传，我们无法知道其具体内容。幸而唐朝太史令李淳风等在注释《九章算术》(卷四)开立圆术时引述了祖暅的研究成果，使得我们能知晓这一伟大创造。仅凭这一成果，我们即深信祖暅是一位杰出

的数学家。

立圆即球，是最常见的几何体之一。关于球体积的计算，曾是数学史上一大难题。在我国古代，《九章算术》中有球体积的一个近似公式，以后张衡、刘徽和祖冲之①父子等相继作过研究。其中刘徽构造出“牟合方盖”，从理论上提出了推算球体积的正确途径，祖暅则在此基础上正确地推导出球体积公式。更为重要的是，祖暅总结出“幂势既同，则积不容异”这一著名论断——我们称之为“刘祖原理”，奠定了我国传统数学体积理论的主要基础。

一　牟合方盖与球体积公式

《九章算术》开立圆术给出的球体积公式是

$$V_{球}=\frac{9}{16}D^3，其中 D 为球直径。$$

关于这一公式的由来，刘徽认为有两种可能。一是借助于实验。“黄金方寸，重十六两。金丸径寸，重九两。率生于此，未曾验也。”利用物体重量与体积成正比关系这一原理，即得。同时刘徽指出，未曾验证过；二是通过几何估算。“令圆幂居方幂四分之三，圆囷居立方亦四分之三，更令圆囷为方率十二，为丸率九，丸居圆囷又四分之三也。置四分自乘得十六分，三自乘得九，故丸居立方十六分之九也”。即由

$$S_{圆}=\frac{\pi}{4}S_{方},$$

得

$$V_{圆囷}=\frac{\pi}{4}V_{立方}=\frac{3}{4}V_{立方}，(\pi\approx 3)。$$

又

① 祖冲之在与戴法兴就《大明历》辩论时曾说：“至若立员（圆）旧误，张衡述而弗改。汉时斛铭，刘歆诡谬其数。此则算氏之剧疵也。”

$$V_{球}=\frac{9}{12}V_{圆囷}=\frac{3}{4}V_{圆囷}$$ （此 3 不一定是 π 的近似值），

所以

$$V_{球}=\frac{9}{16}V_{立方}。$$

对于这种几何估算，刘徽认为其第一步是正确的，其第二步非常粗略。他指出："然此意非也。何以验之？取立方棊(同棋)八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棊皆似阳马，圆然也。按合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉？"在边长为二寸的立方体内，内切两个正交圆柱的公共部分，刘徽称之"牟合方盖"，其形状酷似两把上下对称而又相合的方形伞(如图 3.3.1)。刘徽认为，只有内切于牟合方盖的球，才能使任意水平截面上有"圆幂居方幂四分之三"，才有合盖以方为率，球以圆为率，即

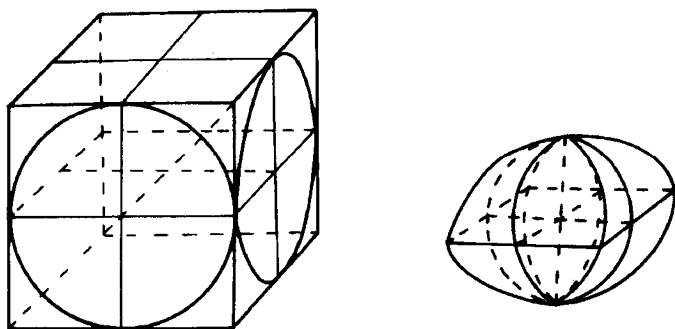


图 3.3.1

$$V_{球}=\frac{3}{4}V_{合盖}。$$

然而古法由

$$V_{球}=\frac{9}{12}V_{圆囷},$$

推得

$$V_{球}=\frac{3}{4}V_{圆囷}。$$

导致以圆囷为方率，当然就显得太粗略了。

接着，刘徽又指出："以周三径一为圆率，则圆幂伤少。令圆囷为方率，则丸积伤多。互相通补，是以九与十六之率偶与实相近，而丸犹伤多耳。"他认为，由

$$V_{圆囷}=\frac{\pi}{4}V_{立方}\approx\frac{3}{4}V_{立方}$$

为取不足近似值，而由

$$V_{球}=\frac{3}{4}V_{圆囷}$$

为取过剩近似值。如此"互相通补"，所得结果

$$V_{球}=\frac{3}{4}V_{圆囷}=\frac{9}{16}V_{立方}$$

倒与实际值相近了。当然此公式仍是过剩："丸犹伤多耳。"

在对古法的分析中，刘徽实际上已经找到了推算球体积公式的正确途径

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{合盖}。$$

关键是要求出牟合方盖的体积$V_{合盖}$。

刘徽试图通过解决"立方之内、合盖之外"这一部分的体积而得到牟合方盖的体积，但因形状太复杂而未获成功。便遗憾地说："观立方之内合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可等正。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。"

二百多年后的祖暅，沿着刘徽的思路，正确地计算出牟合方

盖的体积，从而彻底解决了球的体积问题，他得到的球体积公式是

$$V_{球}=\frac{\pi}{6}D^3\approx\frac{1}{2}D^3，\ \pi\approx3。$$

李淳风在《九章算术》开立圆术刘徽注后记载了祖暅之开立圆术"取立方棊一枚，令立枢于左后之下隅，从规去其右上之廉。又合而横规之，去其前上之廉。于是立方之棊，分而为四。规内棊一，谓之内棊。规外棊三，谓之外棊。更合四棊，复横断之。以勾股言之，令余高为勾，内棊断上方为股，本方之数，其弦也。勾股之法，以勾幂减弦幂，则余为股幂；若令余高自乘，减本方之幂，余即内棊断上方之幂也。本方之幂，即内外四棊之断上幂。然则余高自乘，即外三棊之断上幂矣。不问高卑，势皆然也。然固有所归同而涂殊者尔。而乃控远以演类，借况以析微。按阳马方、高数参等者，倒而立之，横截去上，则高自乘与断上幂数，亦等焉。夫叠棊成立积，缘幂势既同，则积不容异。由此观之，规之外三棊旁蹙为一，即一阳马也。三分立方，则阳马居一，内棊居二可知矣。合八小方成一大方，合八内棊成一合盖。内棊居小方三分之二，则合盖居立方亦三分之二，较然验矣。置三分之二以圆幂率三乘之，如方幂率四而一，约而定之，以为丸率。故曰丸居立方二分之一也。"

如下页图3.3.2，取边长为R的小立方体$ABCDEFGO$，合此八棊为一边长$D=2R$的大立方，以小立方体的左下棱OE为轴，棱长R为半径作四分之一圆柱面，再以后下棱OG为轴、棱长R为半径作四分之一圆柱面，二次分割得到四个曲面立体内棊U_1(即牟合方盖的八分之一)，外棊一U_2，外棊二U_3，外棊三U_4。这外棊三块即是当年刘徽感到难以处理的"立方之内、合盖之外"的这块几何体。把这四块曲面立体重新拼成立方体后，用水平面在Oz轴上z处截割，则内棊U_1截面为大正方形F_1，外棊一U_2截面

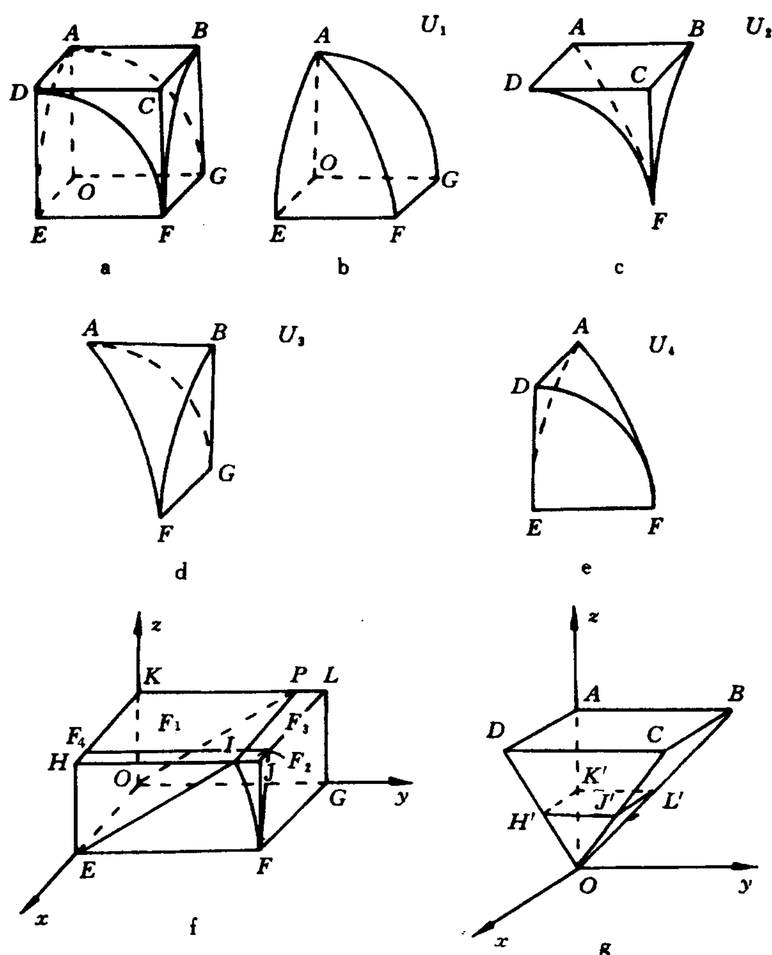


图 3.3.2

为小正方形 F_2，外棊二 U_3 的截面为长方形 F_3，外棊三 U_4 的截面亦长方形 F_4。由勾股定理，

$$F_1=y^2=R^2-z^2。$$

故

$$F_2+F_3+F_4=z^2。$$

作以小立方体的上底面 $ABCD$ 为底，O 为顶点的阳马 U_5(倒立方锥)，其在 z 轴上 z 处的水平截面面积也是 z^2，所以在四棊合成的小立方体中，z 轴上任一处的水平面截之，恒有

$$F_1=R^2-z^2。$$

因此，

$$U_1=R^3-U_5=R^3-\frac{1}{3}R^3=\frac{2}{3}R^3。$$

所以，

$$V_{合盖}=8U_1=8\times\frac{2}{3}R^3=\frac{2}{3}(2R)^3=\frac{2}{3}D^3。$$

于是得到

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{合盖}=\frac{\pi}{6}D^3\approx\frac{1}{2}D^3，\pi\approx3。$$

至此，我国数学家彻底解决了球体积问题。

在国外，关于球体积公式，公元前 3 世纪希腊数学家阿基米德曾有两种方法推导。在《论球与圆柱》卷一中，他以 33 个命题准备，然后以反证法在命题 34 得到结论：球体积等于以球的大圆为底、球半径为高的圆锥体体积的 4 倍。在另一著作《方法》中，他再次讨论球体积公式，取法简便，用力学方法仅一个命题，即得同样结果。

与之相比，刘、祖虽晚于阿基米德，但他们的工作更具有直观的几何特色。

特别令人感兴趣的是，阿基米德也曾研究过牟合方盖。据《方法》前言说，此文是阿基米德呈献给亚历山大城学者爱拉托斯芬(Eratosthenes)的，主要介绍他新发现的两个立体体积公式。其中一个就是刘徽称为牟合方盖的立体。“一圆柱内切于立方体，其

上下底在立方体两相对面内，侧面则切于另外四面，在同一立方体内，又内切另一圆柱体，以另外两相对面为上下底，圆柱体侧面切于其余四面，这两个圆柱体公共部分的体积是立方体体积的三分之二。”

《方法》在命题 15 对此有推导，可惜的是君士坦丁羊皮纸残恰缺去这一推导。因而难以将其与祖暅的工作进行比较。此外，阿基米德千虑有失，对牟合方盖与内切球体积之比竟一无所知，因而在《方法》命题 2 对球的体积从头至尾又推导一遍。也就是说命题 2 和命题 15 二者的论证，其中之一是多余的。

二 刘祖原理

伟大的成果来自于深刻的思想。牟合方盖的构造及其体积的计算，以及球体积公式的诞生，都是以下列原理为基础的。

刘祖原理 两个等高的立体，如果在同一高度的截面积恒相等，则此两立体的体积相等；如果在同一高度的截面积成定比，则此两立体的体积亦成同样的比。

祖暅言简意赅地总结为“缘幂势既同，则积不容异”。

这一原理的发现，是与我国古代数学家对于面积和体积概念的理解相联系的。

《九章算术》方田术曰：“广从步数相乘得积步。”刘徽注：“此积为田幂。凡广从相乘谓之幂。”

依照李淳风的界说：“幂是方面单布之名，积乃众数聚合之称，”积、幂意义全殊。但刘徽却早已使两者统一起来，反映出他深刻的数学思想。一方面，他认为长宽两数之乘积(即整体中所含的单位面积数，称“都数”)为田之面积，“此积为田幂”。另一方面，刘徽把面积看成是由一簇纵(从)线或横(广)线叠合而成，正像布匹是由经线与纬线交织所成一样：“凡广从相乘谓之幂。”

在注释《九章算术》圆田术和环田术时，刘徽则进一步运用

了这一思想。

圆田术曰："半周半径相乘得积步。"

刘徽注："按半周为从，半径为广，故广从相乘为积步也。"

刘徽认为，圆与一矩形等积，此矩形以半周为从、半径为广。何以见得？如果把圆看成是一簇半径连续增大的同心圆叠合而成，那么这些同心圆的周长可叠成一个等腰三角形，此等腰三角形的圆周长为底、圆半径为高。运用出入相补原理，即得半周为从、半径为广之矩形（如图 3.3.3）。

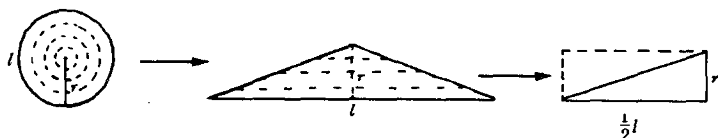


图 3.3.3

$$S_{圆}=S_{三角形}=S_{矩形}=\frac{1}{2}l\,r。$$

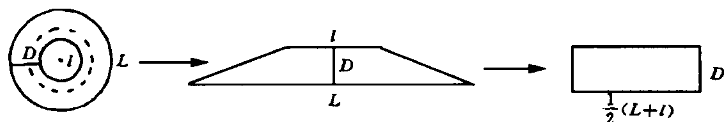
环田术曰："并中外周而半之，以径乘之为积步。"

刘徽注："此田截齐中、外周之长，并而半之者，亦以盈补虚也。"在另一种环田，刘徽又注："并而半之者，以盈补虚，得中平之周，周则为从，径则为广，故广从相乘而得其积。"

刘徽认为，环田乃由一簇同心圆周叠合而成，其中最小的是中周，最大的是外周，而这些同心圆的圆周可叠成一个等腰梯形，此等腰梯形的上底是中周，下底即外周，其高则是径（即中外圆周半径之差）。再由出入相补原理，即得一个从为并中外周之半、广为径的矩形（如图 3.3.4）。商功章曲池术刘徽注："引而伸之，周为袤，求袤之意，环田也。"说的也是这一思想。

这种积线成面的面积观，很自然地被运用于立体体积概念的理解。除了直接定义广袤高之乘积为长方体的体积外，刘徽还把

立体看成是由面叠积而成的。



$$S_{环}=S_{梯形}=S_{矩形}=\frac{1}{2}(l+r)D。$$

图 3.3.4

《九章算术》商功章圆堡壔术曰："周自相乘，以高乘之，十二而一。"刘徽注云："此之圆幂，亦如圆田之幂也。求幂亦如圆囷，而以高乘幂也。"这里刘徽将圆柱体看作是由一簇相同的圆叠积而成，因而其体积的计算是底圆面积乘以高：

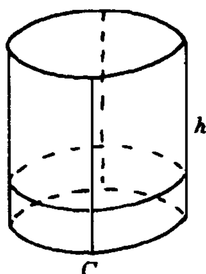


图 3.3.5

$$V=\frac{1}{4\pi}C^2h=\frac{1}{12}C^2h，\pi\approx3。$$

商功章城、垣、堤、沟、堑、渠术曰："并上下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺。"刘徽注云："按此术并上下广而半之者，以盈补虚，得中平之广。以高若深乘之，得一头之立幂。又以袤乘之者，得立实之积，故为积尺。"

城、垣、堤、沟、堑、渠都是正截面为梯形的直棱柱体，可看作是由一簇梯形叠积而成，因而刘徽认为它们的体积是底面积(一头之立幂)乘以高(袤)：

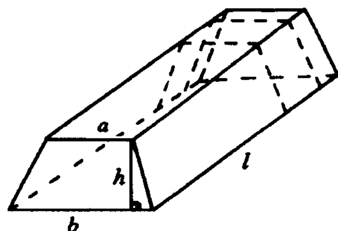


图 3.3.6

$$V=\frac{1}{2}(a+b)hl。$$

进一步分析城垣术刘徽注，其

中包含着这样一种思路：城垣的正截面梯形，通过“损广补狭”而得到一与之等幂的矩形。由这一系列矩形叠合成一与城垣等长度的长方体，其任一截面与城垣截面相等，因此两者体积相等，从而求城垣体积的问题转化为求长方体体积的问题。这就是刘祖原理的思想。

事实上，在一些特殊立体的求积问题中，刘徽已经有效地运用着刘祖原理。

先看方圆立体之关系。

方田章宛田术刘徽注：“若令其(方锥)中容圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹圆幂之与方幂也。”(如图 3.3.7)

$$S_{圆锥侧}/S_{方锥侧}=\pi/4。$$

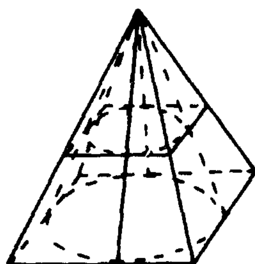


图 3.3.7

商功章委粟术刘徽注，“从方锥中求圆锥之积亦犹方幂求圆幂。”

$$V_{圆锥}/V_{方锥}=\pi/4。$$

商功章圆亭术刘徽注：“从方亭求圆亭之积，亦犹方幂中求圆幂。”(如图 3.3.8)

$$V_{圆亭}/V_{方亭}=\pi/4。$$

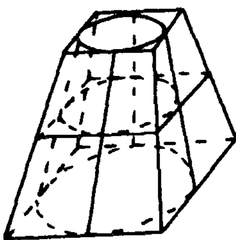


图 3.3.8

对于不相切的情形，刘徽亦有研究。

商功章圆锥术：“下周自乘，以高乘之，三十六而一。”刘徽注：“按此术，圆锥下周以为方锥下方。方锥下方令自乘，以高乘之，合三而一，得大方锥之积。大方锥之积合十二圆锥矣。今求一圆锥，复合十二除之，故令三乘十二得三十六而连除。”今以圆锥底面的周长为大方锥的底边，高不变，则这样的大方锥体积为圆锥体积的 12 倍。

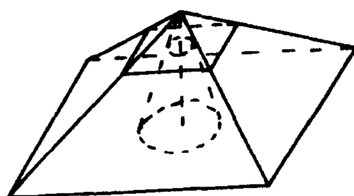


图 3.3.9

$$V_{\text{大方锥}}/V_{\text{圆锥}}=(2\pi r)^2/\pi r^2=4\pi\approx 12，(\pi\approx 3)。$$

再看多面体的状况。

商功章羡除术刘徽注："阳马之棊两邪，棊底方。当其方也，不问旁角而割之，相半可知也。推此上连无成不方，故方锥与阳马同实。角而割之者，相半之势。此大小鳖臑可知更相表里，但体有背正也。"这里，底方是长方形。在这样的阳马中，不论按两对应底边的中点(不问旁)或按底面一条对角线(不问角)与顶点所成的截面截之，必分原阳马为体积相等的两部分。由此推论于高与低都相等的阳马和锥体中，于任一等高处所得之水平截面无不是相等的长方形，所以方锥与阳马等积。如按底面一条对角线与

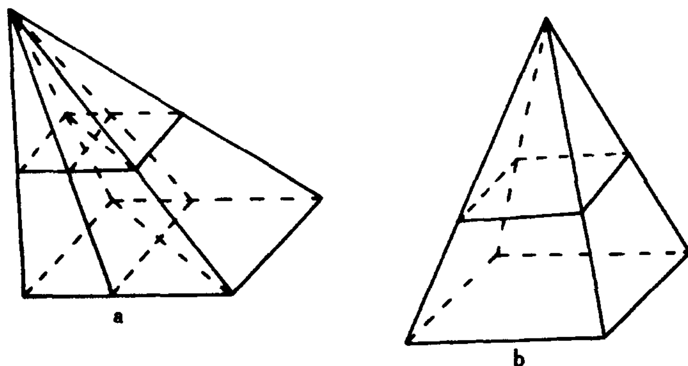


图 3.3.10

顶点所成截面截之，则由于大鳖臑（指后面的鳖臑）与小鳖臑（指前面的鳖臑）的同一水平截面面积均为原阳马同一水平截面面积的一半，故这两鳖臑虽"体有背正"，而其体积必然相等。

还有曲池，它比前述诸立体更复杂，而与刍童同术。刘徽也是这样解释的。

商功章曲池术："其曲池者，并上中、外周而半之，以为上袤；亦并下中、外周而半之，以为下袤。"刘徽注："此池环而不通匝，形如盘蛇而曲之。""引而伸之，周为袤，求袤之意，环田也。"他认为，曲池任一水平截面为一圆环（即环），依环田术，可变成等积之矩形（中平调为从，径为广），从而曲池对应于一刍童，且二者的任一水平截面积相等。因此曲池与刍童等同术。

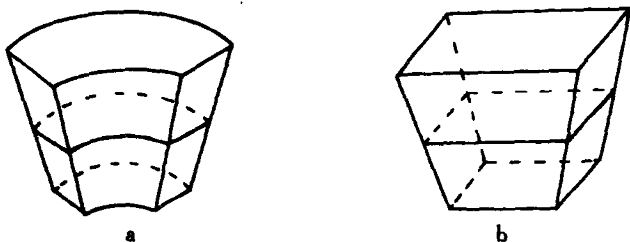


图 3.3.11

后来，刘徽又将此方法用于球体积的研究。他巧妙地构造了牟合方盖，并使之内切一球，他明确指出：

$$V_{球} : V_{合盖} = 圆率 : 方率 = \pi : 4。$$

"冰冻三尺，非一日之寒。"祖暅在深入研究《九章算术》及其刘徽注中的大量有关工作，特别是刘徽关于球体积的工作之后，总结出"缘幂势既同，则积不容异"的论断。其中"幂"是指截面积，"势"理解为"关系"。这就是说，等高处的截面积既然有相同的关系，那么这两个立体的体积也有这样的关系。

无疑，祖暅在刘徽工作的基础上更进了一大步。他的论断指

的是任意两个立体的情形(包括刘徽所论诸立体作为特殊类型)。为纪念刘徽和祖暅的这一功绩，我们称此原理为“刘祖原理”。

在国外，直到17世纪，才由意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri B)重新发现这一原理。他是伽里略的学生，“不可分原理”的创立者。他认为，一条线由无穷多个点构成，一个面由无穷多条线构成，一个立体则由无穷多个面构成，而构成的元素则分别称为线、面、体的不可分量。他在公元1635年出版的《用新方法促进的连续不可分几何学》一书中提出了他的“不可分原理”和以后用他的名字命名的卡瓦列里原理：二同高的立体，如果在等高处的截面积恒相等，则体积相等；如截面积成定比，则体积之比等于截面积之比。需要指出的是，由前面的分析知道，3世纪我国数学家刘徽已初步具有“不可分原理”的思想，而卡瓦列里原理则与祖暅“缘幂势既同，则积不容异”的论断无异。

三 刘祖原理对后世的影响

刘祖原理的提出，对后来体积理论的发展有着深刻影响。

唐初数学家王孝通于公元626年著《缉古算经》，在第三问他研究水利工程中常见的几何体——堤：上底水平，下底倾斜，前后为竖直面，左右倾斜(如图3.3.12)，并提出了其体积正确的计算公式。

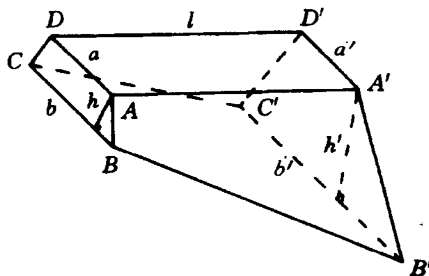


图 3.3.12

求堤积都术："置西头高倍之，加东头高，又并西头上、下广，半而乘之。又置东头高倍之，加西头高，又并东头上、下广，半而乘之。并二位积，以正袤乘之，六而一，得堤积也。"即

$$V_{堤}=\frac{l}{6}\ [\frac{a+b}{2}(2h+h')+\frac{a'+b'}{2}(2h'+h)]。$$

《缉古算经》没有记载推导过程，我们认为王孝通的这一成果得益于刘祖原理。

事实上，王孝通读过《九章算术》及其刘徽注，也读过《缀术》，应当知道刘祖原理。所以他很可能从刍童出发引申出一般堤积公式。

先将堤的前后两端梯形各改为等积矩形 $A_0B_0C_0D_0$ 和 $A_0'B_0'C_0'D_0'$，则得刍童 $A_0B_0C_0D_0$-$A_0'B_0'C_0'D_0'$（如图 3.3.13），其

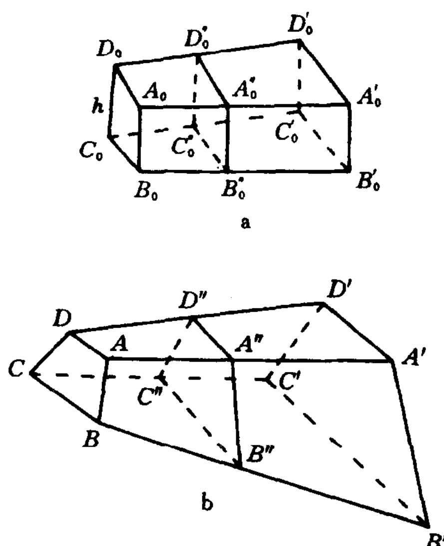


图 3.3.13

中 $A_0D_0=B_0C_0=\frac{1}{2}(a+b)$，$A_0'D_0'=B_0'C_0'=\frac{1}{2}(a'+b')$。由《九章算术》商功章刍童术，其体积为：

$$V_{刍童}=\frac{l}{6}\left\{[2\times\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a'+b')]h+[2\times\frac{1}{2}(a'+b')+\frac{1}{2}(a+b)]h'\right\}$$

$$=\frac{l}{6}[\frac{a+b}{2}(2h+h')+\frac{a'+b'}{2}(2h'+h)]。$$

任取一平行于 $ABCD$ 的平面截刍童成矩形 $A_0''B_0''C_0''D_0''$，截原堤成梯形 $A''B''C''D''$ 。则

$$S_{A_0''B_0''C_0''D_0''}=S_{A''B''C''D''}。$$

于是由刘祖原理即知

$$V_{堤}=V_{刍童}。$$

清初梅文鼎(1633～1721)在公元 1703 年至 1710 年间与学友毛心易、谢野臣、杨昆生讨论各种图形面积、体积，将心得写成《方圆幂积》一卷。

为计算球体积，他构造曲面体——截锥圆柱 V_1，并使之对应一个多面体——长方锥 V_2："圆柱内截圆角(锥)体，纵剖其一边而令圆筒伸直。以其幂为底、以半径为高，成长方锥。此体即成四圆角"（如图 3.3.14）。这两者的体积是相等的，$V_1=V_2$。

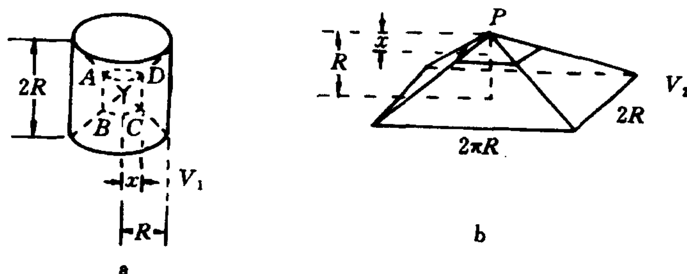


图 3.3.14

事实上，对于满足 $0<x<R$ 的一切 x，左图曲面体中随 x 变化的小圆柱 $ABCD$ 的侧面积 S_1 与右图中距顶点 P 为 x 的与底平

面平行的截面积S_2相等：$S_1=S_2=2\pi x\cdot 2x=4\pi x^2$. 由刘祖原理有：$V_1=V_2$。

接着，他利用已经得到的“球体积是以半径为高、大圆为底的圆锥体体积的四倍”这一结果，推断“立圆(球)得圆柱三之二”：

$$V_{球}=\frac{2}{3}V_{圆柱}。$$

再根据V_1的构造，$V_1=\frac{2}{3}V_{圆柱}$，所以

$$V_{球}=V_1。$$

而容易算出$V_2=\frac{4}{3}\pi R^3$。于是得到

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi}{6}D^3。$$

所以梅文鼎说：“以浑圆径自乘、再乘，得圆径上立积。以圆率乘之，得数。六除之，得浑积。”

清末徐有壬(1800～1860)著《截球解义》，其中复述《数理精蕴》所引改写本《几何原本》有关球表面积、球带、球冠与球外切圆柱侧面积的关系时，认为《数理精蕴》未讲出所以然，而“遍检梅氏(文鼎)诸术亦未能明释之也，蓄疑于心久矣。近读李淳风九章注(内有祖暅之开立圆术)乃得其解，因释之，以告同志。”

他提出：“设如径与高等之圆囷内容同径之圆球，此球必居圆囷三之二也。”何以明之？他取内容球的圆柱体八分之一，用高为h的截面截割这两个几何体，则所得截面有如下关系(如图3.3.15)：

圆柱截面积＝环形截面积＋球截面积

而球形面积是

$$\pi(R^2-x^2)=\pi h^2。$$

这正好是底半径及高都等于球半径的圆锥在h处的截面积。于是

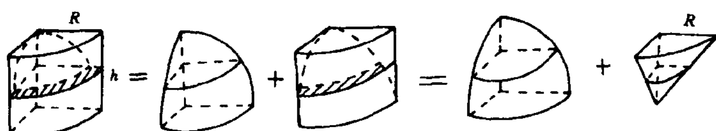


图 3.3.15

由刘祖原理,徐有壬得到简明结论:“球与圆囷相较必少一锥体矣,是故一锥一球相并与圆囷同，而锥居圆囷三分之一，球必居圆囷三分之二矣。”

进一步，徐有壬还研究了球扇形体积问题，他指出：“圆囷既剜去内锥，割去外锥，则所余为圆球截积(空中如碗,外面则上小下大)，必居圆囷三分之二。”即球扇形体积是同高外切圆柱体积的三分之二。他的推导是这样的：如图 3.3.16，V 为球扇形，它是某些圆柱、圆锥的和差。

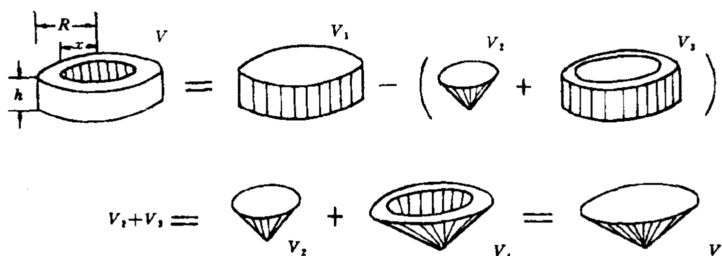


图 3.3.16

已知球半径为 R，球扇形上底半径为 x，高为 h，于是

$$V_1=\pi R^2h,$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi hx^2,$$

$$V_4=\frac{1}{3}\pi h(R^2-x^2),$$

$$V_5=V_2+V_4=\frac{1}{3}\pi hR^2。$$

所以

$$V=V_1-V_5=\frac{2}{3}\pi R^2h,$$

其中关键一步是：$V_3=V_4$。

徐有壬仔细观察“中空如碗”的 V_3，它是圆柱剜去上、下底半径分别为 x，R 的球台的曲面体，其体积很难算。但徐有壬却明确地判断此体积等于“外锥” V_4：“此锥以球半径、正弦半径(x)为圆面积之较(差)为底，亦以余弦(h)为高。”

徐有壬何以能作出如此判断？我们认为这也是受益于刘祖原理。事实上，如图 3.3.17，在同高 y 处，V_3 的截面积

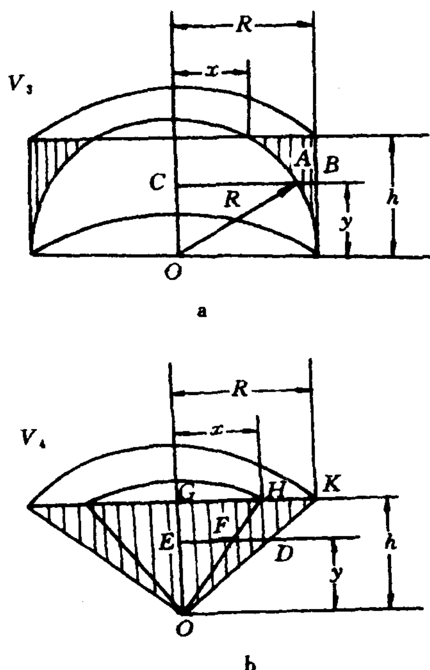


图 3.3.17

$$S_{V_3}=\pi(CB^2-CA^2)=\pi[R^2-(R^2-y^2)]=\pi y^2。$$

V_4 的截面积

$$S_{V_4}=\pi(ED^2-EF^2)=\frac{\pi y^2}{h^2}(R^2-x^2)=\frac{\pi y^2}{h^2}\cdot h^2=\pi y^2。$$

因此由刘祖原理就有

$$V_3=V_4。$$

第四章　信都芳与甄鸾

第一节　信　都　芳

信都芳，字玉琳，河间(今河北省河间县)人。信都芳的生卒年月不详，但其生活大致应在5世纪末至6世纪上半叶。信都芳从小喜爱数学，并十分刻苦用心，在当地出了名。《北齐书》卷四十九称信都芳“少明算术，为州里所称。有巧思，每精研究，忘寝与食，或坠坑坎。尝语人云‘算之妙，机巧精微，我每一沉思，不闻雷霆之声也。’其用心如此。”

信都芳前期的科学研究是得到元延明的支持并与元延明合作进行的。元延明(482～528)是北魏文成帝拓跋濬(452～465年在位)之孙、献文帝拓跋弘(466～471年在位)的三弟元猛之长子。孝文帝(元宏)太和五年(481年)，元猛受封安丰王，元猛死后元延明继安丰王之位。元延明博学多才，家中藏书1万多卷。《魏书》卷二十有评价：元延明与中山王元熙、临淮王元彧等“并以才学令望有名于世。虽风流造次不及元熙、元彧，而稽古淳笃过之。”元延明虽公务繁忙，但却充分利用有限的时间来研究金石考古、乐律、文史、数学等，著有诗赋赞颂铭诔300余篇，《五经宗略》23卷及《诗礼别义》、《帝王世纪》等，并且“大行于世”。元延明的大量研究工作需要有人合作、协助，因此知名学者信都芳被召人元延明的宾馆。“延明家有群书，欲抄集《五经》算事为《五经宗》，及古今乐事为《乐书》，又聚浑天、欹器、地动、铜乌、漏刻、候风诸巧事，并图画为《器准》，并令芳(信都芳)算之。会延明南奔，芳乃自撰注。”(《北史》卷八十九信都芳传)由此可见，元

延明计划进行三个方面的工作，并请信都芳协助，但后来因“延明南奔”而由信都芳独自完成。这三方面工作是：

其一，“抄集《五经》算事为《五经宗》”，即从《五经》中把与数学有关的内容摘录下来，编成《五经宗》一书。《五经宗》似即《五经宗略》，计有23卷，当时曾广泛流传。我们注意到甄鸾的《五经算术》晚于《五经宗略》，二者或许有某种联系。

其二，抄集“古今乐事为《乐书》”，即收集整理资料编写《乐书》。《隋书》卷三十四有载：“《乐书》七卷，后魏丞相士曹行参军信都芳撰。”《新唐书》卷五十七则说：“信都芳删注《乐书》九卷。”二者说法有殊，但信都芳对乐事有深入研究，并参与了《乐书》的编撰修改，必为事实。

其三，“并浑天、欹器、地动、铜乌、漏刻、候风诸巧事，并图画为《器准》。”《器准》似即《器准图》。《隋书》卷三十四说，《器准图》为“后魏丞相曹参军信都芳撰”。信都芳根据元延明收藏的资料，把我国传统科学仪器汇编成书。此书已失传。根据李迪先生的观点(《北朝研究》,1990(3))，此书大概包括以下三方面的内容：首先是描述各仪器的构造及原理，使用方法等的文字部分。其次是图形，即把每一件画成图形。根据“聚浑天……诸巧事”的说法，显然是把实物收集到一起(以元延明当时的状况,这一点是能办到的)，照实画图，而不是想象的。当时最普遍的画图法是与现代机械制图类似的二轴侧投影法，其特点是能够表现出物体三个面(互相垂直的)的立体图。这部分应当是该书的主体内容。最后是一些计算和数据，具体说明每件仪器的各种零部件的大小与规格，以便仿造和安装。

在元延明处，信都芳结识了知名学者祖暅并得到其指导。《北史》卷八十九“信都芳”有记载：“有江南人祖暅者，先于边境被获，在延明家。旧明算历，而不为王所待。芳谏王礼遇之。暅后还，留诸法授芳，由是弥复精密。”由此可见，信都芳在元延明家

中，见到被俘的祖暅，知其为著名学者，建议元延明尊重并善待祖暅，因而得到祖暅的指导而获益不浅。因此，信都芳后来的历算成就与祖暅的帮助是分不开的。

完成了元延明计划的上述三项工作后，信都芳隐居于并州乐平之东山(乐平在今山西省昔阳县西南部)，但不久即被乐平郡太守慕容保乐发现，并要召见，信都芳不得已而去见慕容保乐。而保乐之弟慕容绍宗则又向齐神武推荐了信都芳，信都芳因此“为馆客，授中外府田曹参军”。以后，信都芳主要从事天文历算研究，“注重差、勾股，复撰《史宗》”(《北史》卷八十九)。

北魏于公元534年分裂为东魏和西魏。东魏(后魏)暂时采用《正光历》，但不久发现《正光历》的误差。《魏书·律历志》(下第九)载：“孝静世，《壬子历》气朔稍违，荧惑失次，四星出伏，历亦乖舛。”因而齐献武王提出改历之事。“兴和元年十月，齐献武王入邺，复命李业兴，令其改正。”

李业兴是北朝著名的历算家。他是东魏当时采行的《正光历》的主要编撰者。《正光历》为“九家共修，以龙祥(张龙祥)、业兴(李业兴)为主”(《魏书》卷一〇七上)，但后来“推业兴为主”(《魏书》李业兴传)。《正光历》颁行于北魏孝明帝正光四年(523年)，因以壬子为上元，故又称《壬子元历》。《正光历》在北魏、东魏、西魏及北周均采用过，先后共行用43年(陈遵妫·《中国天文学史》,1984)。据《隋书·经籍志》卷三十四记载，李业兴有如下著作：《壬子元历》1卷、《甲子元历》1卷、《七曜历疏》1卷和《七曜义疏》1卷。其中《甲子元历》是李业兴于兴和元年(539年)受齐献武王之命编撰的，因其以甲子为上元而命名为《甲子元历》。

时任散骑常侍执读臣的李业兴提出《甲子元历》后，朝廷组织有关专家(善历者)“考核验证之”。时任田曹参军的信都芳“关通历术”，因而作为主要专家参与答辩，并提出不少问题向李业兴

质询。经过答辩，信都芳对《甲子元历》作出肯定性结论："今《甲子》新历，业兴潜构积年，虽有少差，校于《壬子元历》，近天者多。若久而验天，十年二十年间，比《壬子元历》，三星行天，其差为密。"(《魏书》卷一〇七下)他认为，《甲子元历》虽然有小误差，但比以前的《壬子元历》(《正光历》)为精密。于是朝廷决定于兴和二年(540年)采行《甲子元历》以代替《正光历》。又因当时年号为兴和而将《甲子元历》定名为《兴和历》。

据《北史》(卷八十九)介绍，信都芳"又私撰历书，名曰《灵宪历》，算月频大频小，食必以朔，证据其甄明，每云：'何承天亦为此法，而不能精。《灵宪》若成，必当百代无异议者'。书未成而卒。"可见信都芳对自己的《灵宪历》是充满信心和希望的。

信都芳博学多才，涉及领域众多，著述甚丰。但其所著之作《史宗》、《乐书》、《遁甲经》、《四术周髀宗》、《灵宪历》(未成)等均已失传，因而我们难以进一步知晓信都芳的历算成就。所幸的是，信都芳为《四术周髀宗》写的自序，被《北史》(卷八十九)摘录而得以保留下来："汉成帝时，学者问盖天，扬雄曰：'盖哉，未几也。'问浑天，曰：'落下闳为之，鲜于妄人度之，耿中丞象之，几乎，莫之息矣。'此言盖差而浑密也。盖器测影而造，用之日久，不同于祖，故云'未几也'。浑器量天而作，乾坤大象，隐见难变，故云'几乎'。是时，太史令尹咸穷研晷盖，易古周法，雄乃见之，以为难也。自昔周公定影王城，至汉朝，盖器一改焉。浑天覆观，以《灵宪》为文，盖天仰观，以《周髀》为法。覆仰虽殊，大归是一。古之人制者，所表天效玄象。芳以浑算精微，术机万首，故约本为之省要，凡述二篇，合六法，名《四术周髀宗》。"这里，信都芳通过对盖天和浑天两种假说的分析和比较，认为它们不论是覆观，或是仰观，从总体来看，则是"大归是一"。不过他以为浑天的计算精微。至于"六法"、"四术"指的是什么，没有进一步的资料。关于《四术周髀宗》的内容，在《周髀算

经》卷上李淳风等的注中有一段关于信都芳的引文，值得注意。“后魏信都芳注《周髀四术》云：‘按永平元年戊子(508 年)是梁天监之七年也，见洛阳测影，又见公孙崇集诸朝士共观秘书影，同是夏至之日，以八尺之表测日中影，皆长一尺五寸八分，虽无六寸，近六寸。’”由此可见，《四术周髀宗》中有关于夏至日中立表测影的记述。研究立表测影问题，自然会用到数学计算，如涉及太阳高远问题，则要借助重差术了。

信都芳清静寡欲，专心于学问。这种精神令人钦佩。《北史》(卷八十九)这样评价他：“芳性清俭质朴，不与物和。”还引了事实例证之：“绍宗给其赢马，不肯乘骑；夜遣婢侍以试之，芳忿呼殴击，不听近己。狷介自守，无求与物。”

第二节　甄　　鸾

一　身世与事迹

甄鸾，字叔遵，无极(今河北省无极县)人。甄鸾的生卒年月不详，但根据有关史料判断，其主要活动当在北周。从一些书上的署名看，甄鸾曾在北周王朝担任司隶大夫、汉中郡守，并有“前司隶毋极县开国伯”的爵位。此外，《夏侯阳算经》卷上“言斛法不同”内有“至梁大同元年(535 年)甄鸾校之，用二尺九寸二分”，考校斛的容积单位。如果此条可信，则甄鸾是原在南朝，后到北朝的。

甄鸾是北朝著名的历算家，著述甚丰。据李俨先生的《中国古代数学史料》(1954 年)，甄鸾所撰的著作有：《五曹算经》、《甄鸾算术》、《五经算术》、《周天和年历》、《七曜术算》、《历术》、《七曜本起历》、《笑道论》、《帝王世录》和《年纪》(与王道圭合撰)。此外，《旧唐书·经籍志下》(卷 47)称：《九章算经》9 卷，

甄鸾撰；《隋书·经籍志三》(卷三十四)则说：《九章算术》2卷，徐岳、甄鸾重述；《九章算经》二十九卷，徐岳、甄鸾等撰。甄鸾还对众多的数学经典著作进行注释，如《周髀》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《张邱建算经》、《数术记遗》、《三等数》等。

甄鸾笃信佛教，而精通佛典并颇有研究。北周时代朝廷既崇道法，又欲齐儒、道、佛三教，导致世俗人们的思想混乱，也引发了一场讨论。甄鸾因此撰写《笑道论》一篇，宣扬佛教，嘲笑道教。北周武帝于建德二年(573年)召集群臣、僧人、道士进行辩论，排定三教先后次序，结果是儒教为先，道教为次，佛教为后。于是，甄鸾成为脱离时流之人。

甄鸾曾研究过度量衡。《隋书·律历志上》(卷十六)有记载："《甄鸾算术》云：'周朝市尺，得玉尺九分二厘'。""又《甄鸾算术》云：'玉升一升，得官斗一升三合四勺。'此玉升大而官斗小也。以数计之，甄鸾所据后周官斗，积玉尺九十七寸有奇，斛积九百七十七寸有奇。"注意到玉升为北周保定五年(565年)所颁行，因而我们可以顺便得出结论：《甄鸾算术》当完成于公元565年之后。

甄鸾曾编撰《天和历》，北周从天和元年(566年)开始施行。建朝初期，北朝采用的历法是北魏李业兴编撰的《正光历》，武成元年(559年)开始着手编撰周历。天和元年，甄鸾编撰的历法被采行。该历以$365\frac{5\ 731}{23\ 460}$日为岁实，$29\frac{153\ 991}{290\ 160}$日为朔策，定闰周为391年144闰，这与祖冲之《大明历》一致。《天和历》先后行用共13年，至宣政元年(578年)为《大象历》所替代。

二　数学工作

甄鸾在数学方面做过大量工作，他编撰和注释了不少数学著作，但有的已失传。现有关于甄鸾数学工作的史料主要有：《五曹

算经》、《五经算术》、《数术记遗》甄鸾注和《周髀》甄鸾注。

甄鸾所著《五曹算经》是一部为地方行政人员所写的应用算术书。全书共5卷，以田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹五个项目为标题，故名《五曹算经》。“曹”是官署分职管理的机构(相当于现今所说的政府职能部门)，起于西汉，当时有四曹，以后日渐增多，到南北朝时，有的官署设有近20个曹。书中“五曹”是其中一部分曹，但却是现实生活中极为重要的五个方面，而且以田、兵、集、仓、金为序逻辑地排列。田曹，“生人之本，上用天道，下分地利”，故列为卷一；卷二为兵曹，“既有田畴，必资人功，故以兵曹次之”；卷三为集曹，“既有人众，必用食饮，故以集曹次之”；卷四为仓曹，“众既会集，必务储蓄，故仓曹次之”；卷五为金曹，“仓廪货币交质变易，故金曹次之”。

《五经算术》有上、下二卷，是甄鸾从《尚书》、《孝经》、《诗经》、《周易》、《周官》、《礼记》、《论语》、《汉书》等经籍中需要数学知识或计算技能的地方摘录下来，加上“甄鸾按”，即给予详细的注释。这与元延明、信都芳撰《五经宗略》类似，因而二者可能有某种联系。

《数术记遗》一书，卷首题有“汉徐岳撰、北周汉中郡守、前司隶，臣甄鸾注”。但书中称刘洪为“刘会稽”，又引天目山隐者的话，用“刹那”、“大千”等佛经词汇，与后汉末年的历史事实不合。因此，钱宝琮先生认为，“本书决不是徐岳的原著”。又，书中叙述各种记数法时，本文非常简略，如果没有甄鸾的注释，实难了解作者的原意。所以，钱宝琮先生认为，“《数术记遗》是甄鸾的依托伪造而自己注释的书。”

甄鸾为《周髀》作过88条注释，对于需要计算的问题都进行了计算。其中某些问题在开头还冠以名称，如“求日高法”、“求二十四气损益法”、“求牵牛星去极法”等，但对没有数字计算的经文则均未加注释。

从甄鸾的数学著作和注释看，甄鸾的数学工作创新之所不多，但也不乏值得重视之处。如对十进小数的概念有了新的发展、大数的进位应采用中数，还介绍了多种计数方法和计算工具(详见本卷第一编第四章)。

第四编

南北朝末期、前唐历算

第一章　南北朝末期到隋代的数学

第一节　隋代前后历法变革的政治背景

北魏末年，天文学家张子信避乱隐遁于海岛30余年，他的重大发现引发了中国古代历法的重大变革。其事见于《隋书·天文志》：

“至后魏末，清河张子信，学艺博通，尤精历数。因避葛荣乱，隐于海岛之中，积三十许年，专以浑仪测候日月五星差变之数，以算步之，始悟日月交道，有表里迟速，五星见伏，有感召向背。言日行在春分后则迟，秋分后则速。合朔月在日道里则日食，若在日道外，虽交不亏。月望值交则亏，不问表里。又月行遇木、火、土、金四星，向之则速，背之则迟。五星行四方列宿，各有所好恶。所居遇其好者，则留多行迟，见早。遇其恶者，则留少行速，见迟。……”

以现代天文学的理论分析上述记述，张子信发现的意义表现在以下三个方面：

（1）发现太阳运动的不均匀性；

（2）发现五星运动的不均匀性；

(3) 发现月亮视差对日食的影响。

张子信的发现把中国古代关于交食、太阳与五星运动的认识推进到了一个崭新的阶段，并为历法计算结构数学化开拓了新道路。张子信的学说立即获得一批历家的响应：

“有广平人刘孝孙、张孟宾二人，同知历事。孟宾受业于张子信，并弃旧事，更制新法。又有赵道严，准晷影之长短，定日行之进退，更造盈缩，以求亏食之期。”①

未及北齐天文学家真正领悟出张子信学说的奥秘，北齐便为北周所灭(577 年)。仅隔四年，北周又为隋朝取代。杨坚为使“禅代”之事有个借口，“欲以符命曜于天下”。善于察言观色的道士张宾，乘机“自云玄相，洞晓星历，因盛言有代谢之征，又称上仪表非人臣相。由是大被知遇，恒在幕府。”②待杨坚篡取北周之后，即擢张宾为华州刺史，并令其造历。张宾等“依何承天法，微加增损”成《开皇历》，于公元 584 年颁行。显然，这样一部“拼凑”的历法是难以服众的，果然遭到了刘孝孙与刘焯的责难。当时张宾颇受隋文帝杨坚信赖，被提为太史令，他与刘晖联手，“共短孝孙，言其非毁天历，率意迂怪，焯又妄相扶证，惑乱时人”。结果刘孝孙与刘焯“竟以他事斥罢”。后来，张宾去世，已为掖县丞的刘孝孙再次赴京，又遭到刘晖的诘难。这次刘孝孙虽被留在太史监，却“累年不调，寓宿观台”。刘孝孙不忍如此屈辱，愤然抱书推棺至朝廷宫前，伏棺恸哭，决意以死谏君。此举惊动了杨坚，他向国子祭酒何妥询问，何妥赞誉了刘孝孙在历算方面的才干，杨坚当即提升刘孝孙任大都督，并命他与张宾比较历法的短长。这又引出另一位久被埋没在太史监的历算家张胄玄“与孝孙共短宾历”。

开皇十四年(594 年)，杨坚询问有关日食测算的事。据报，张

①② 《隋书·律历志》。

胄玄与刘孝孙所推远比张宾准确。杨坚召见刘孝孙与张胄玄，亲自嘉奖。刘孝孙趁机请求先斩刘晖，然后再定历法。杨坚不悦，只好作罢。不久刘孝孙去世，张胄玄被举荐，在受诏拜见杨坚时，张胄玄投其所好，“因言日长影短之事，高祖大悦，赏赐甚厚，令与参定新术。”[1]

刘焯获悉张胄玄受到重用，便把刘孝孙的历法稍事修改，更名《七曜新术》，报奏朝廷。这部历法与张胄玄之法颇为不同，受到张胄玄等人的诋毁，刘焯的努力又遭失败。

开皇十七年(597 年)，张胄玄新历制成，付有司颁行。张胄玄因而受到杨坚倚重，“由是擢拜员外散骑侍郎，兼太史令，赐物千段。晖及党与八人，皆斥逐之。”[2] 张胄玄为了巩固自己在太史监的地位，借机举进袁充。张、袁二人“互相引重，各擅一能，更为延誉。胄玄言充历，妙极前贤，充言胄玄历术，冠于今古。”[3]

开皇二十年(600 年)，杨坚让皇太子负责历事。刘焯借此机会，再次增修其书，名曰《皇极历》，驳正胄玄之短[4]，得到太子嘉许。当时刘焯“为太学博士，负其精博，志解胄玄之印，官不满意，又称疾罢归。”仁寿四年(604 年)，刘焯上书皇太子，历数张胄玄六条失误。二人互相驳难，未有定决。大业元年(605 年)，著作郎王劭、诸葛颖向杨广进言称赞“刘焯善历，推步精审，证引阳明。”[5]杨广感叹曰：“知之久矣！”至大业四年因预报日食无效，杨广决定召见刘焯，“欲行其历”。而这时，袁充正得杨广宠幸，他“左右胄玄，共排焯历。”[6]未几，刘焯去世，其历终未颁行。

这场旷日持久的历法争辩在中国古代历法史上有着重要的意义。历算家们在相互诘难之中，吸取当时新的研究成果，采用新的数学方法，推衍高精度的历法常数，以提高历法的精度，从而

---

①③④⑤⑥《隋书·律历志》。

②《北史·张胄玄传》。

锤炼出二部重要的历法，其一是张胄玄的《大业历》，再者就是刘焯的《皇极历》。

第二节　张胄玄与《大业历》

张胄玄，勃海蓨(今河北景县)人[①]。约北魏孝昌二年(526 年)生，隋大业年间(612 年左右)卒。张胄玄博学多通，尤精天文历算之学。约开皇十年(590 年)，经由冀州刺史赵煚的举荐，被授为云骑尉，到京师太史监任职，参议天文历法之事。在与刘孝孙一起批驳张宾《开皇历》中，博得隋文帝的赏识，遂受令制定新历法。开皇十七年(597 年)，张胄玄制成新历，新历颁用后受到刘焯的批评，但张胄玄坚持己见，驳难不止。大业六年(610 年)，刘焯去世，张胄玄取长补短，厘定历术，这就是流传至今的《大业历》。

诚然，与刘焯的《皇极历》相比，《大业历》要逊一筹。但是，张胄玄深受张子信、刘孝孙等人的影响，也受到了刘焯的影响，再加上他自己独立、勤奋的观测与研究，使《大业历》成为一部很具特色的重要历法。《北史・张胄玄传》对《大业历》颇有赞誉，举出《大业历》“与古不同者三事”，“其超古独异者有七事”。兹仅对其关于定朔、五星两项论之如下。

一　《大业历》的定朔算法

东汉时，人们已认识到合朔时刻受到月亮运动不均匀性的影响。刘洪于《乾象历》中列有“月离表”以计算月亮改正值。自张子信发现太阳运动的迟疾变化后，人们在思考如何在定朔计算中引入太阳改正值。史料表明，约公元 576 年，北齐刘孝孙在其《武平历》中已引入了“日躔盈缩”。如北宋周琮《明天历》“历

---

① 见《北史・张胄玄传》，但《隋书・律历志(中)》称其为“河北信都人”。

论”称：

“日躔盈缩定差：张胄玄名损益率曰盈缩数，刘孝孙以盈缩数为朏朒积，皇极有陟降率、迟速数，麟德曰先后、盈缩数，大衍曰损益，朏朒积，崇天曰损益、盈缩积。”

上述所列皆是诸历中用于计算定朔时太阳改正的术语，周琮之意在于指出它们“名异实同”。刘孝孙历中既有“朏朒积”，其应为考虑“日躔盈缩”而设。只是其历未传，不可详考。

《北史·张胄玄传》称：

“胄玄以为加时先后，逐气参差，就月为断，于理未可。乃因二十四气，列其盈缩所出。实由日行迟，则月逐日易及，令合朔加时早；日行速，则月逐日少迟，令合朔加时晚。检前代加时早晚，以为损益之率。日行，自秋分已后至春分，其势速，计一百八十二日而行一百八十［八］度；自春分已后至秋分，日行迟，计一百八十二日而行一百七十六度。每气之下，即其率也。”

这段史料说明了张胄玄关于太阳运动不均匀性的规律及其对合朔时刻影响的认识：

(1) 合朔时刻受到太阳运动不均匀性的影响而有变化，不应仅考虑月亮运动的不均匀性(“就月为断，于理未可”)，而要编制太阳在一年中不均匀性变化规律表(“乃因二十四气，列其盈缩所出”)。

(2) 根据日、月运行的迟疾关系，参以前代合朔记录，制定“太阳改正”值(“检前代加时早晚，以为损益之率”)。

(3) 由日行盈缩变化，推知秋分后至春分，日行速，太阳在182日内，实行188度；春分后至秋分，日行迟，太阳在182日内实行176度。

据《大业历》，张胄玄定朔算法如下：

“以入历日余所入历日损益率，以损益盈缩积分，如差法而一，为定积分。乃与入气定盈缩，皆以盈减、缩加本朔望小余；不足

减者，加日法乃减之，加时在往日，加之，满日法者去之，则在来日；余为定小余。”

据术文，有：

$$\text{定朔时刻}=\text{平朔时刻}\pm\text{入气定盈缩}\pm\text{定积分}, \quad (1.1)$$

其中“入气定盈缩”即为太阳改正：

$$\text{定盈缩}=\text{盈缩数}\pm\frac{\text{入气日}}{15}\times\text{损益率}。 \quad (1.2)$$

其中“盈缩数”、“损益率”由《大业历》中的“日躔表”给出。式(1.1)中

$$\text{定积分}=\frac{\text{盈缩积分}\pm\text{入历日余}\times\text{损益率}}{\text{差法}}。 \quad (1.3)$$

这是月亮改正。

式(1.2)，(1.3)在数学形式上都属于线性插值，其方法当来自刘洪。但这是现存文献中首先给出以“入气定盈缩”和“入历定积分”推求定朔时刻，这无疑是中国历法计算方法上划时代的进步。

二 行星定见日改正的数学方法

以上元为起点，按五星会合周期推算出的行星晨见东方的时刻称为星平见时刻，但实际观测却发现五星晨见东方的真实时间较平见时间后延或超前。以现代天文学观念而论，这一现象的产生是由于行星本身运动的不均匀性，即五星实行轨道为椭圆形轨道所致。

《隋书·天文志》记载张子信隐居海岛三十余年，“专以浑仪测候日月五星差变之数，以算步之”，并言“五星行四方列宿，各有所好恶。所居遇其好者，则留多行迟，见早。遇其恶者，则留少行速，见迟。与常数并差，少者差至五度，多者差至三十许度。”这一记述表明，张子信的海岛观测不仅发现了五星运行的不均匀

性，并给了计算改正值的数学方法（“以算步之”）。当然，对行星运动不均匀性而导致晨见时间的迟、早，张子信是以“好”、“恶”解释的，这是古代“天人感应”宇宙观念的自然反映。

至于张子信怎样“以算步之”，已不见史载，但“张胄玄、刘孝孙、刘焯等，依此差度，为定入交食分及五星定见定行”，可知张胄玄、刘焯等人的工作共承张子信，他们的工作应是张子信方法的继承与完善。

《大业历》木星定见改正术文如下：

“木；平见在春分前者，以三千三百四十乘去大寒后十日数，以加平见分，满法去之，以为定见日及分。立秋后者，以四千二百乘去寒露日、加之，满同前。春分至清明均加四日，后至立夏五日，以后至芒种加六日，均至立秋。小雪前者，以七千四百乘去寒露日数，以减平见日分；冬至后者，以八千三百乘去大寒后十日数，以减之；小雪至冬至均减八日，为定见日数。初见伏日各十四度。”

《大业历》木星改正的术文可以表示为下述一组线性函数的组合：

$$f(i)=\begin{cases}-\dfrac{8\ 300}{42\ 640}(2\times15.22+10-i), & i\in\ [\text{冬至日，大寒后 10 日}],\\ \dfrac{3\ 340}{42\ 640}i, & i\in\ [\text{大寒后 10 日，春分日}],\\ 4, & [\text{春分日，清明日}],\\ 5, & [\text{清明日，立夏日}],\\ 6, & [\text{立夏日，立秋日}],\\ -\dfrac{4\ 200}{42\ 640}(4\times15.22-i), & i\in\ [\text{立秋日，寒露日}],\\ -7\ 400i, & i\in\ [\text{寒露日，小雪日}],\\ -8, & i\in\ [\text{小雪日，冬至日}]。\end{cases}$$

$f(i)$的两个零点为大寒后 10 日和寒露日，在区段［大寒后 10 日，寒露日］中 $f(i)>0$，$\max f(i)=6$；在区段［寒露日，大寒后 10

日] 中 $f(i)<0$，$\min f(i)=-8$。以改正值为纵坐标(日)，以二十四节气为横坐标，可以绘出 $f(i)$ 的曲线图(4.1.1)。图 4.1.1 中的点状曲线是木星改正的理论曲线。

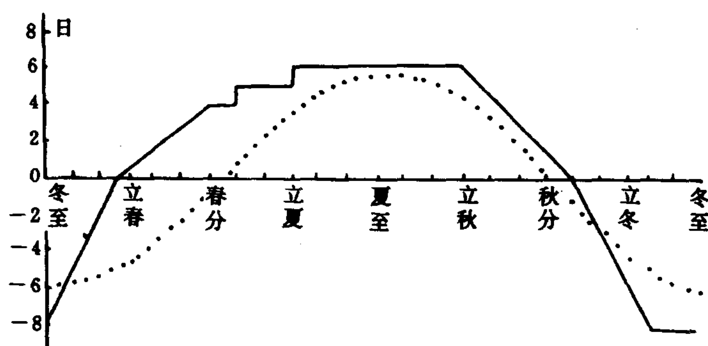


图 4.1.1 大业历木星运动改正曲线

此处要特别强调的是这一方法的数学形式。中国古代数学虽无表达函数变化的符号代数形式，但中算家在观测实践中已经认识到某种随时间的变化而改变的量，如行星改正的“入气加减”就是一例。而且，中算家以古算特有的算法语言，完整的表述出一个回归年内不同时段改正值的变化，从而构成了一组线性函数的组合，并表现为一种“折线函数”(zig-zag function)，而且从图示中可以看出这一“折线函数”与理论曲线在变化态势上基本相近。这无疑表明了隋唐历家对观测数据进行了认真的数学处理。在当时的认识水平和数学手段的条件下，以折线函数来分段逼近真实天象应当说是一种简单而可行的方法。

三 五星行度计算的等差级数法

隋代之前，对五星行度的推算，是将其一个会合周期按视运动的顺、逆、留、合分成若干段，每段中以给定的平均行度步算。随着五星观测资料的日益准确和数学知识水平的提高，隋唐历家

对五星运行的计算方法有了新的改进——即引入等差级数的方法来提高计算的精度。张胄玄可谓是首开此风。

《大业历》中木星动态为：

“木初见，顺，日行万六百一十八分，日益迟六十分，一百一十四日行十九度万三千八百三十二分，而留。二十六日，乃退，日六千一百一分，八十四日退十二度八百四分。又留二十五日三万七千六百一十二分、小分四，乃顺。初日行三千八百三十七分，日益疾六十分，百一十四日行十九度万三千七百一十八分而伏。”据此可将木星各段行日、行度等项列于下表：

表 4.1.1　《大业历》木星运行表

	(晨始见)	初顺	前留	退	后留	后顺	夕伏
天数(日)		114	26	84	$25\frac{37\ 612.4}{42\ 640}$	114	35
总行度		$19\frac{13\ 832}{42\ 640}$	0	$12\frac{804}{42\ 640}$	0	$19\frac{13\ 718}{42\ 640}$	(缺)
公差(分)		-60	0		0	60	
初行速(分)		10 618	0	6 101	0	3 837	

《大业历》对木星在初顺段先疾后迟、后顺段先迟后疾的变化，采取等差级数求和的方法。

初顺：初日行速 $a=10\ 618$ 分，

每日速度变化(公差) $d=-60$ 分(益迟为负)，段日 $n=114$ 日，

$$\text{行度 } S_1=\frac{n}{42\ 640}\times\left[a+\frac{n-1}{2}d\right]$$

$$=\frac{114}{42\ 640}\left[10\ 618+\frac{113\times(-60)}{2}\right]=19\frac{13\ 832}{42\ 640}(\text{度})。$$

同理，后顺段行度有

$$S_2=\frac{114}{42\ 640}\left[3\ 837+\frac{114-1}{2}\times 60\right]=19\frac{13\ 718}{42\ 640}。$$

这样，木星在一个会合周期的任一时刻的行度，可按以下分段函数求出。

$$\begin{cases} s_1(n)=\frac{1}{42\ 640}\left[10\ 618n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-60)\right], & n\in[0,114]，初顺， \\ s_2(n)=19\frac{13\ 832}{42\ 640}, & n\in[0,26]，留， \\ s_3(n)=19\frac{13\ 832}{42\ 640}-\frac{60\ 101}{42\ 640}n, & n\in[0,84]，退， \\ s_4(n)=7\frac{13\ 018}{42\ 640}, & n\in[0,25.9]，留， \\ s_5(n)=7\frac{13\ 018}{42\ 640}+\frac{1}{42\ 640}\left[3\ 837n+\frac{n(n-1)}{2}\times 60\right], & n\in[0,114]，后顺。 \end{cases}$$

《大业历》木星退行段仍以平均运动计算

$$S=\frac{6\ 101}{42\ 640}\times 84=12\frac{804}{42\ 640}度。$$

第三节 刘焯与《皇极历》

刘焯，字士元，信都昌亭(今河北冀县)人。东魏武定三年(544年)生，隋大业六年(610年)卒。刘焯出身于一个小官吏家庭，他的父亲刘洽曾为郡功曹。刘焯虽然生就“犀额龟背”，但“聪敏沈深”。曾先后学《诗》于同郡的刘轨思，受《左传》于广平(今河北鸡泽)的郭懋当，问《礼》于阜城(今河北阜城)的熊安生。三处受业皆未满期便辞别老师另求新知。当刘焯得知武强(今河北武强)刘智海家中有大量藏书，便与好友刘炫就读于刘智海家，“向经十载，虽衣食不继，晏如也。”[①] 这十年苦读，使刘焯成为饱学之士，遂以儒学知名，为州博士。

① 《隋书·刘焯传》。

约隋文帝开皇三年(583 年)，冀州刺史赵煚聘刘焯为从事。不久又举秀才，到京都长安(今西安)与著作郎王劭同修国史，兼参议律历。后任员外将军，与诸儒于秘书省考定群言，“共论古今滞义。前贤所不通者。每升座，论难锋起，皆不能屈。”① 开皇六年(586 年)，洛阳《石经》运至京师，文字多有磨损，刘焯与刘炫奉敕考定。开皇十年(590 年)，在国子监举行的祭奠先圣先师的典礼上，刘焯、刘炫与群儒论义，二刘以其精博，深挫诸儒，招致一些人的嫉妒，“遂为飞章所谤，除名为民。”②

官场的失意，反使刘焯“优游乡里，专以教授、著述为务，孜孜不倦。”③他一方面继续研究儒家经典，匡正讹误，阐发新义，著有《五经述议》一书；另一方面着力研习《九章算术》、《周髀》、《七曜历书》等历算名著。“推步日月之法，量度山海之术，莫不核其根本，穷其秘奥。”④著有《稽极》10 卷，《历书》10 卷。在研究、著述的同时，刘焯与刘炫还从事大量的教育工作，“天下名儒后进，质疑受业，不远千里而至者，不可胜数。”⑤

二刘以其聪明博学称著于世，被废的皇太子杨勇欲召而用之。隋文帝得知此事，便敕令二刘入川事蜀王杨秀，这大约是隋文帝和新立太子杨广惧怕满腹经纶、且精于天算的二刘见用于杨勇，将有碍于他们的政治安排，而作出的迅速决定。可二刘不愿入川，久拖不至，杨秀闻而大怒，遣人枷送于蜀，将刘焯充军，令刘炫为门卫，以羞辱之。稍后才又令二刘作典校书籍的工作。后杨秀因罪被废，二刘方获准返回京师，与诸儒修定礼律，“刘焯升云骑尉”，⑥ “刘炫升旅骑尉”。⑦

刘焯一生命运多舛，仕途坎坷。自开皇三年到大业六年的长达 20 余年里，刘焯先后五次参与历法的争辩，但均受人际关系的

①②③④⑤⑥《隋书·刘焯传》。

⑦《北史·刘炫传》。

阻挠和政治因素的制约遭致失败，他也因此遭受了种种磨难。但刘焯则百折不挠，奋争不息，至死不渝，在斗争中锤炼出一部冠绝千古的名历《皇极历》。刘焯在《皇极历》中颇多创新，他获得了一系列高精度的天文数据，规范了天文表格的编制，并在定气、定朔、交食、漏刻、黄赤道差以及五星位置计算上广泛采用了等间距二次内插法、等差级数法和坐标变换法，从而把中国古代历法向数学化、精密化和合理化的方向推进了一大步。《皇极历》的出现是中国历法走向成熟的标志。尽管《皇极历》未能正式颁行，但李淳风仍把它收入官修正史律历志中，而让其享有这一殊荣。

第四节　刘焯二次内插法及其数理分析

刘焯对中国数学史的伟大贡献，是他创造性的使用了二次内插法，其术见《皇极历》“推每日迟速数术”：

“见求所在气陟降率，并后气率，半之；以日限乘而泛总除，得气末率。又日限乘二率相减之残，泛总除，为总差。其总差亦日限乘而泛总除，为别差。率前少者，以总差减末率，为初率，(乃) [半] 别差加之[①]；前多者，即以总差加末率，皆为气初日陟降数。以别差前多者日减，前少者日加初数，得每日数。所历推定气日，随算其数，陟加、降减其迟速，各为迟速数。”

这是由某气迟速数 $f(nL)$、陟降率 Δ_1 和后一气陟降率 Δ_2，求该气内每日迟速数 $f(nL+t)$（L 为一节气的长度；$n=0,1,\cdots,11$；$t=1,2,3,\cdots,L$）的问题。刘焯术文可用公式表述为

$$f(nL+t)=f(nL)+\frac{t}{L}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)。\tag{1.4}$$

① (　) 中为讹误文字，当删；[　] 中为校补文字。下同。

刘焯内插公式不论是在天文学史还是在数学史上都是一项非常重要的成就。但刘焯是怎样创制二次内插算法呢?《隋书·律历志》云:"此但略校其总,若精存于《稽极》云。"《稽极》一书已失传,因此刘焯二次内插算法的造术之由,便无从得知。一种观点认为"可能是受到《周髀》等书中一次内插法的启发,经过试验而总结出来的。"也有学者推测是受到了公元600年前后传入的巴比伦天文学知识的影响。50年代,李迪先生在《介绍〈中算家的内插法研究〉》一文中曾指出:"本书只说中国古代有了内插法,也有了它的应用;但是,至于怎样发现的,为什么历法家知道用内插法计算问题等,书中并没有说明。"

下面,我们将从术语内涵的分析、算法结构的剖解、造术之源的探索三个方面入手,来揭示刘焯二次内插算法的构造原理。

如图4.1.2,设Δ_1,Δ_2分别为所在气陟降率、后气率。术文"见求所在气陟降率,并后气率,半之;以日限乘而泛总除,得气末率。……"其中"日限"为11,"泛总"系"盈泛"和"亏总"的合称。刘焯规定"秋分后春分前为盈泛(16)",春分后秋分前为亏总(17)",这样:

$$\text{秋分后春分前每气间隔 } L=\frac{\text{盈泛}}{\text{日限}}=\frac{16\times 10}{11}=14.55(\text{日}),$$

$$\text{春分后秋分前每气间隔 } L=\frac{\text{亏总}}{\text{日限}}=\frac{17\times 10}{11}=15.45(\text{日})。$$

因此,

$$\text{气末率}=\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}。$$

在图4.1.2中几何量CD表示"气末率"。术文"又日限乘二率相减之残,泛总除,为总差。"

$$\text{总差}=\frac{\text{日限}}{\text{泛总}}(\Delta_1-\Delta_2)=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}。$$

图 4.1.2 刘焯二次内插算法造术的几何解释

图 4.1.2 中几何量 AE 表示“总差”。术文“其总差亦日限乘而泛总除，为别差。”

$$别差=\frac{日限}{泛总}\cdot 总差=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L^2}。$$

图 4.1.2 中几何量 AF 表示“别差”。

术文“率前少者，以总差减末率，为初率，半别差加之[①]；前多者，即以总差加末率[②]，皆为气初日陟降数。”

术文中“前少”指 $\Delta_1<\Delta_2$，“前多”为 $\Delta_1>\Delta_2$。图 4.1.2 所示为“前多”。依术文“前少”时初率为：

---

① 原文“乃别差加之”，严敦杰与李俨均视为衍文而删。若删此五字，则出现“……为初率，……皆为气初日陟降数”实同名异的句式。在刘焯此段术文中，后一术名总是由前一术名进行一次新的运算而产生。“乃别差加之”，系说明如何由“初率”求得“气初日陟降数”。算理分析表明其“乃”字应是“半”字之误。故此五字似不当删，只须改“乃”为“半”即可。

② 从术文中对“前少”时初日陟降数的计算(初率＋半别差)，可知“……前多者，即以总差加末率”之后似应有“半别差减之”，这样方与下句“皆为气初日陟降数”之“皆”相呼应。但从此段术文阐述的整体性来看，亦可视为承上而省，故不补。

$$初率=末率-总差=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}-\frac{\Delta_2-\Delta_1}{L}，(\Delta_1<\Delta_2)。$$

“前多”时初率为：

$$初率=末率+总差=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}，(\Delta_1>\Delta_2)。$$

在图4.1.2中，几何量AB表示“前多”时“初率”。

注意，一气中每一日间隔为1，即

$$BB_1=B_1B_2=\cdots=B_{L-1}C=1。$$

气末率、总差、别差、初率亦可表示为矩形的面积：

$$气末率=\square B_{L-1}D；总差=\square AE_1；$$

$$别\quad 差=\square AF_1；初率=\square AB_1。$$

因此，小梯形$\triangle AB_1$的面积为

$$\delta_1=\triangle AB_1=\underset{(初率)}{\square AB_1}-\frac{1}{2}\underset{(别差)}{\square AF_1}，(\Delta_1>\Delta_2)，$$

或者，在“前少时”，

$$\delta_1=\triangle AB_1=\square AB_1+\frac{1}{2}\square AF_1，(\Delta_1<\Delta_2)。$$

此即术文中“……为初率，(乃)〔半〕别差加之，……，皆为初日陟降数。”

术文“以别差前多者日减，前少者日加初数，得每日数。……”刘焯认为太阳在一气内每日的改变量(“别差”)是相等的。因此，只要在“初日陟降数”中累次加或减“别差”，就可求得每日陟降数δ_t，即有(以下推算为“前多”的情形，“前少”者类此)：

$$\delta_1=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2L^2},$$

$$\delta_2=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{3}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2),$$

$$\delta_3=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{5}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2),$$

……

一般地

$$\delta_t=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{2t-1}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2),\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ L。$$

术文“所历推定气日，随算其数，陟加降减其迟速，各为迟速数。……”术文中“其迟速”即相应于本气的迟速数 $f(nL)$，关键是怎样理解“随算其数”。按，《广雅·释诂一》：“随，顺也。”故“随”可作“顺着”，“顺次”解。因此，“随算其数”即顺次计算自本气初日到时刻 t 之间的“陟降数”：δ_1，$\delta_1+\delta_2$，$\delta_1+\delta_2+\delta_3$，…，$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_t$，…故有

$$\delta_1=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2L^2},$$

$$\delta_1+\delta_2=2\ \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+2\ \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{4}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2),$$

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3=3\ \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+3\ \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{9}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2),$$

$$\delta_1+\cdots+\delta_t=t\ \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+t\ \frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

可以验证，当 $t=L$ 时，$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_L=\Delta_1$。这在图 4.1.2 上看来是显然的。这样，时刻 t 的迟速数 $f(nL+t)$ 为

$$f(nL+t)=f(nL)+\frac{t}{2L}(\Delta_1+\Delta_2)+\frac{t}{L}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

此即公式(1.4)。

我们知道，等间距二次插值的差分公式为

$$F(t+n\omega)=F(T)+nF'(T)+\frac{n(n-1)}{2!}F''(T),\qquad (1.5)$$

其中 $F'(T)=F(T+\omega)-F(T)$，$F''(T)=F'(T+\omega)-F'(T)$。记 $\Delta_1=F'(T)$，$\Delta_2=F'(T+\omega)$，则

$$\Delta_1-\Delta_2=-F''(T)。$$

又在内插计算中，n 常为分数。设函数所在间隔为 $T+t$，则

$$n\omega=t, \qquad n=\frac{t}{\omega}。$$

对公式(1.5)作如下变形

$$F(T+t)=F(T)+\frac{t}{\omega}\Delta_1+\frac{t}{2\omega}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2\omega^2}(\Delta_1-\Delta_2) \qquad (1.5)'$$

$$=F(T)+\frac{t}{\omega}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{\omega}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t^2}{2\omega^2}(\Delta_1-\Delta_2)。 \qquad (1.5)''$$

可见，刘焯二次内插公式(1.4)与(1.5)″的形式是一致的。

刘焯二次内插算法的公式形式虽同牛顿公式一致，但其构造思想却与其旨趣迥异。那么刘焯思想的源头何在呢?《九章算术》均输章“五尺金棰”术似能透露某种端倪。

“五尺金棰”问如下(这里略去了答案及刘注)：

“今有金棰，长五尺，斩本一尺，重四斤，斩末一尺，重二斤。问次一尺各重几何?”

“术曰：令末重减本重，余即差率也。又置本重，以四间乘之，为下第一衰。副置，以差率减之，每尺各自为衰，副置下第一衰以为法，以本重四斤遍乘列衰，各自为实。实如法得一斤。”

这个问题实质上是已知等差级数首项(本重)、末项(末重)及项数(5)，求其各项。以术推演可得

本重，　本重$-\frac{1}{4}$差率，　本重$-\frac{2}{4}$差数，

本重$-\frac{3}{4}$差率，本重$-$差率($=$末重)。

“五尺金棰”术与刘焯二次内插算法两者术名有如下相应关系：

本重　　差率　　$\frac{1}{4}$差率(即公差)　　末重

　　初数　　总差　　别差　　　　　　　末率

刘焯术文中在求得气末率、总差、别差及初数之数后，其每日陟降数的推求即相当于“五尺金棰”术中求次一尺各重：

　　　　　　本　　重　　　　　　　差率

$$\delta_t=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2L^2}-\frac{(t-1)}{L}\cdot\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}。$$

《隋书》“刘焯传”述其学术造诣时，云其“为学不倦，《九章算术》、《周髀》、《七曜》历书十余部，推步日月之法，量度山海之术，莫不核其根本，穷其秘奥。……”在此我们看到《九章算术》精邃算理对中国古代天算的深刻影响。

在《皇极历》中，与二次内插法有关的术文还见于“求月朔弦望应平会日所入迟速”和“推朔弦望日术”两处，兹分述如下：

“求月朔弦望应平会日所入迟速：各置其经余为辰，以入气辰减之，乃日限乘日，日内辰为入限，以乘其气前多之末率，前少之初率，日限而一，为总率。其前多者，入限减泛总之残，乘总差，泛总而一，为入差，并于总差，入限乘，倍日限除，加以总率；前少者，入限再乘(差)[别](别)[差][①]，日限自乘，倍而除，亦加总率，皆为总数。乃以陟加、降减其气迟速数为定。”

术文第一句中“入限”，即合朔时刻与前一气之间的距离。

$$\text{入限}=\text{日限}\times\text{日}(\text{朔大余})+(\text{朔小余}-\text{气小余})_{\text{辰}}。$$

若令

$$t=\frac{\text{入限}}{\text{日限}}=\text{日}(\text{大余})+\frac{\text{朔辰}-\text{气辰}}{\text{日限}}。$$

此即“气朔距”。

---

① “入限再乘别差”，百衲本《隋书》作“入限再乘差别”，“差别”二字倒互。严敦杰与李俨改此句为“入限自乘，再乘别差”。按，“再乘”即乘两次，如《九章算术》“少广”章开立方术云“若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。”知严、李所改未允。

对于太阳改正，分前多、前少两种情形来考虑。“前多”($\Delta_1>\Delta_2$)时据术文，

$$总数=总率+\frac{1}{2}\frac{入限}{日限}(总差+入差), \qquad (1.6)$$

其中

$$总率=\frac{入限}{日限}\times前多之末率=t\ \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2L},$$

$$入差=\frac{泛总-入限}{泛总}\times总差=(1-\frac{t}{L})\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}。$$

化简(1.6)式得：

$$总数=\frac{t}{L}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{L}\cdot\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}+\frac{t}{2L}(1-\frac{t}{L})(\Delta_1-\Delta_2)。 \qquad (1.6)'$$

“前少”($\Delta_1<\Delta_2$)时

$$总数=总率+\frac{入限^2\times别差}{2\ 日限^2}, \qquad (1.7)$$

其中

$$总率=\frac{入限}{日限}\times前少之初率=t(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{\Delta_1-\Delta_2}{L}),$$

$$\frac{入限^2}{2\ 日限^2}\times别差=\frac{t^2}{2}\frac{\Delta_2-\Delta_1}{L^2}。$$

化简(1.7)式得

$$总数=\frac{t}{L}\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-\frac{t}{L}(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{t^2}{2L^2}(\Delta_2-\Delta_1)。 \qquad (1.7)'$$

公式(1.6)′和(1.7)′在形式上可统一为

$$总数=\frac{t}{L}\Delta_1+\frac{1}{2}\frac{t}{L}(\frac{t}{L}-1)(\Delta_2-\Delta_1)。$$

记 $f(nL)$ 为“其气迟速数”，这样合朔时刻(t)的太阳改正为

$$f(nL+t)=f(nL)+\frac{t}{L}\Delta_1+\frac{1}{2}\frac{t}{L}(\frac{t}{L}-1)(\Delta_2-\Delta_1)。 \qquad (1.8)$$

公式(1.8)即是牛顿二次内插公式。

“推朔弦望日术：(A)各以月平会所入之日加减限，限并后限而半之，为通率；又二限相减，为限衰。前多者，以入余减终法，残乘限衰，终法而一，并于限衰而半之；前少者，半入余乘限衰，亦终法而一，〔减限衰。〕皆加通率，入余乘之，(日)〔终〕法而一，所得为平会加减限数。(B)其限数又别从转余为变余，朓减朒加本入余。限前多者，朓以减与未减，朒以加与未加，皆减终法，并而半之，以乘限衰；前少者，亦朓朒各并二入余，半以乘限衰；皆终法而一，加于通率，变余乘之，(日)〔终〕法而一。(C)所得以朓减、朒加限数，加减朓朒积而定朓朒。乃朓减、朒加其平会日所入余，满若不足，进退之，即朔弦望定日及余。”

如上，我们将术文分为三个层次：

第一个层次(A)，计算不足一日部分的月亮改变量(“加减限数”)，

记 Δ_1 为“(前)限”、Δ_2 为“后限”，术文中

$$\text{通率}=\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2};\qquad \text{限衰}=\Delta_1-\Delta_2\text{ 或 }\Delta_2-\Delta_1\text{。}$$

如术文所述，“前多”时

$$\text{限数}=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[\frac{\text{终法}-\text{入余}}{\text{终法}}\times\text{限衰}+\text{限衰}\right]\right\}\times\frac{\text{入余}}{\text{终法}}\text{。}\tag{1.9}$$

“前少”时

$$\text{限数}=\left\{\text{通率}-\text{限衰}+\frac{1}{2}\frac{\text{入余}}{\text{终法}}\times\text{限衰}\right\}\times\frac{\text{入余}}{\text{终法}}\text{。}\tag{1.10}$$

若令　$t=\frac{\text{入余}}{\text{终法}}$，则有

“前多”：　$$\text{限数}=t\,\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{t}{2}(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)+t\,\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\text{。}\tag{1.9$'$}$$

"前少"：　限数$=t\dfrac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t(\Delta_2-\Delta_1)+\dfrac{t^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1)$。　(1.10)′

此二式可以合并为一式，而有：

$$\text{平会加减限数}=t\Delta_1+\frac{1}{2}t(t-1)(\Delta_2-\Delta_1)。\quad (1.11)$$

第二个层次(B)，月亮在一日之内速度变化较大，上所求"平会日加减限数"是按直线梯形计算，为一级近似。为了减少误差，《皇极历》又给出了一种修正方法，基本思想是：将第一次求得的"限数"作为"变余"，以"变余"为自变量求其改变量——"变率"（注：术文称其为"所得"，为叙述方便，今以意命之为"变率"）。尔后视月速变化的"朓"、"朒"加减第一次的"限数"，即进行二次修正。第二个层次即求"变率"。刘焯此段术文叙述极为简略，术意隐秘难明，经分析其算法可以表述为下列算式：

$$\text{“变率”(朓)}=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[\frac{\text{终法}-\text{入余}}{\text{终法}}+\frac{\text{终法}-\text{入余}+\text{变余}}{\text{终法}}\right]\text{限衰}\right\}\frac{\text{变余}}{\text{终法}}$$
$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t_0^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2),\quad (1.12)$$

$$\text{“变率”(朒)}=\left\{\text{通率}+\frac{1}{2}\left[\frac{\text{终法}-\text{入余}}{\text{终法}}+\frac{\text{终法}-\text{入余}-\text{变余}}{\text{终法}}\right]\text{限衰}\right\}\frac{\text{变余}}{\text{终法}}$$
$$=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{t_0^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)。\quad (1.13)$$

其中$t_0=\dfrac{\text{变余}}{\text{终法}}$，$t=\dfrac{\text{入余}}{\text{终法}}$。

第三个层次(C)对"限数"进行二次修正，并求"月亮改正"和"朔弦望定日余"。"限数"的修正视"朓"、"朒"而有不同：

"朓"时修正："限数"－"变率"；"朒"时修正："限数"＋"变率"。

由(2.9)′式

$$\text{“限数”}=t\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}+\frac{1}{2}t(1-t)(\Delta_1-\Delta_2)。(1.9)'$$

将(1.12)，(1.13)变形为

$$“变率”=t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+t_0\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}+\frac{1}{2}(t_0-2t_0\pm t_0^2)(\Delta_1-\Delta_2),$$

（“朓”：＋；“朒”：－）。

这样，

$$“限数”-“变率”(“朓”)$$
$$=(t-t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+(t-t_0)\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}+$$
$$\frac{1}{2}(t-t_0)\ [1-(t-t_0)]\ (\Delta_1-\Delta_2),\qquad(1.14)$$

$$“限数”+“变率”(“朒”)$$
$$=(t-t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+(t+t_0)\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}+$$
$$\frac{1}{2}(t+t_0)\ [1-(t+t_0)]\ (\Delta_1-\Delta_2),\qquad(1.15)$$

同理，“前少”时“变率”为

“朓”：
$$t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t_0(\Delta_1-\Delta_2)+(t_0t-\frac{t_0^2}{2})(\Delta_1-\Delta_2),\qquad(1.16)$$

“朒”：
$$t_0\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-t_0(\Delta_1-\Delta_2)+(t_0t+\frac{t_0^2}{2})(\Delta_1-\Delta_2)。\qquad(1.17)$$

修正后的“限数”为

“朓”：
$$(t-t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-(t-t_0)(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{(t-t_0)^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1),\qquad(1.18)$$

“朒”：
$$(t+t_0)\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}-(t+t_0)(\Delta_2-\Delta_1)+\frac{(t+t_0)^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1)。\qquad(1.19)$$

若令 $T=t\pm t_0$（朓－；朒＋），

则(1.14)，(1.15)，(1.8)，(1.9)四式可以统一为

$$T\Delta_1+\frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2-\Delta_1)。\qquad(1.20)$$

这说明，新自变量$T(t\pm t_0)$的改变量形式与原“限数”的形式(见式1.11)是一致的。但是，注意到这里的t_0正是原先的“限数”，即第一次插值。因此，《皇极历》二次修正结果的数学原理，就是把第一次插值结果作一次变量替换回代于原式再作一次插值运算，这一思想与现代逐次插值方法几相一致。

第二章 王孝通《缉古算经》

王孝通是唐代初期杰出的数学家，他的著作《缉古算经》是一部很重要的著作，对后世有深远影响。本章将对王孝通，特别是对《缉古算经》进行较详细而全面的论述。

第一节 王孝通和他的《缉古算经》

虽然王孝通是位杰出的数学家，在当时即有很大影响，但是并没有留下关于他的传记资料，只有一些零星记载。他的“上缉古算术表”则包含着有价值的内容。现将“上缉古算术表”全文引录于下，再结合其他史料讨论王孝通的生平事迹。

“臣孝通言：臣闻九畴载叙，纪法著于彝伦；六艺成功，数术参与造化。夫为君上者，司牧黔首，有神道而设教，采能事而经纶，尽性穷源莫重于算。昔周公制礼，有九数之名。窃寻九数即九章是也。其理幽而微，其形秘而约，重勾聊用测海，寸木可以量天，非宇宙之至精，其孰能与于此者。汉代张苍删补残缺，校其条目，颇与古术不同。魏朝刘徽笃好斯言，博综纤隐，更为之注。徽思极毫芒，触类增长，乃造重差之法，列于终篇。虽即未为司南，然亦一时独步。自兹厥后，不继前踪。贺循、徐岳之徒，王彪、甄鸾之辈，会通之数无闻焉耳。但旧经残驳，尚有阙漏。自刘以下更不足言。其祖暅之‘缀术’，时人称之精妙，曾不觉方邑进行之术全错不通，刍甍、方亭之问于理未尽。臣今更作新术，于此附伸。臣长自闾阎，少小学算，镌磨愚钝，迄将皓首，钻寻秘奥，曲尽无遗。代乏知音，终成寡和。伏蒙圣朝收拾，用臣为太

史丞。比年以来，奉敕校勘傅仁钧历，凡驳正术错三十余道，即付太史施行。伏寻《九章》商功篇有平地役功受袤之术。至于上宽下狭，前高后卑，正经之内阙而不论。致使今代之人不达深理，就平正之间同欹邪之用。斯乃圆孔方枘，如何可安。臣昼思夜想，临书浩叹，恐一旦瞑目，将来莫睹。遂于平地之余，续狭斜之法，凡二十术，名曰《缉古》。请访能算之人考论得失，如有排其一字，臣欲谢以千金。轻用陈闻，伏深战悚。谨言。”

这是王孝通在写完《缉古算术》后上报给皇帝时写的报告，其中附带说到了一些与自己生平有关的内容。

王孝通说：“臣长自闾阎，少小学算，镌磨愚钝，迄将皓首”。“闾阎”即指民间，王孝通之说有自谦之意，可是他绝不是出身于名门大户。他从小就对数学感兴趣，进行学习，琢磨自己的愚昧迟钝，都快要到白头发(老年)了。说明他一直热爱数学，研究数学。又说：“伏蒙圣朝收拾，用臣为太史丞。”这是指，他是从前朝(隋)过来的人，并且任命他为太史丞。太史丞是国家天文机构中的低级官吏，从七品下。唐代的官品分为正副(从)各九品，每品又分上下，因而有 36 个等级，太史丞为第 28 级。在担任太史丞之前，王孝通还担任过算历博士，品级大约是八品，这是一种从事教学的职务，可能是教授与数学有关的历法内容。王孝通的太史丞一职应是在“上缉古算经表”前不久才被任命的。

王孝通说：“比年已来，奉敕校勘傅仁钧历…”“比年”即近几年，他受命对傅仁钧所作之历法进行校勘。这件事是这样的：公元 618 年李渊建立唐王朝，因傅仁钧“善历算、推步之术”，由太史令庾俭、太史丞傅奕上表推荐，李渊因召他“改修历法”。傅仁钧经过几个月的工作，造出新历《戊寅元历》，武德元年(618 年)七月“诏颁新历，授仁钧员外散骑常侍，赐物二百段。”[①] 二年之

① 《旧唐书》卷七十九“傅仁钧传”。

后，《戊寅历》屡出差误："(武德)三年(620年)正月望及二月、八月朔，当食，比不效。"六年(623年)，诏吏部郎中祖孝孙考其得失，祖孝孙"使算历博士王孝通以《甲辰历》法诘之"。[①] 所谓《甲辰历》即隋张胄元所作之《大业历》，唐立国之初仍沿用，后由《戊寅历》代替。王孝通受命后对《戊寅历》进行了研究，提出了30多条改正意见，并认为《甲辰历》是好的。

傅仁钧对王孝通的驳正表示不能同意，他说："今王孝通不达宿度之差移，未晓黄道之迁改，乃执南斗为冬至之恒星，东井为夏至之常宿，率意生难，岂为通理？夫太阳行于宿度，如邮传之过逆旅，宿度每岁既差，黄道随而变易，岂得以胶柱之说而为斡运之难乎！"

祖孝孙了解了王孝通和傅仁钧的说法，认为傅仁钧的说法"为然"。贞观(627～649)初有一个叫阴弘道的人"又执孝通旧说以驳之"，傅仁钧仍不屈服。不久，李淳风又驳傅仁钧历十有八事，唐太宗命大理卿崔善为"考二家得失"，结果李淳风说对的7条，11条还是《戊寅历》的正确。由此，傅仁钧后来升为太史令。[②]

王孝通参加的对《戊寅历》的校勘工作，有明确的日期和署名，共有四人，王孝通为其中之一：

"武德九年五月二日

　　校历人前历博士臣南宫子明

　　校历人前历博士臣薛　弘疑

　　校历人算历博士臣王　孝通

监校历大理卿清河县公崔　善为"[③]

由此可知，王孝通在武德九年(626年)时为算历博士，大约是

---

① 《新唐书》卷二十五"历志一"。

② 《旧唐书》卷七十九"傅仁钧传"。

③ 《旧唐书》卷三十二"历志一"。

这不久升为太史丞的。他的“上缉古算术表”可能就是在这之后二三年的事，也就是在贞观初年。假定是在贞观二年(628 年)，这时他快白头发了，估计 50 岁左右，则他约生于 579 年，再过二年便进入隋朝。据此推测，王孝通的青壮年时代大部分是在隋朝度过的。以享寿 60 岁计算，则逝世于贞观中。

王孝通在“上缉古算术表”中提到贺循、王彪两个人，研究数学史的学者也从未对他们有何说法。贺循是南北朝时刘宋人，主要是管礼乐的官员。王彪是南北朝宋齐时人，军人。记载上二人均不研究数学，也许贺循的工作与数学有一些关系。不知王孝通为何提到他们，难道王孝通知道他们研究过数学？

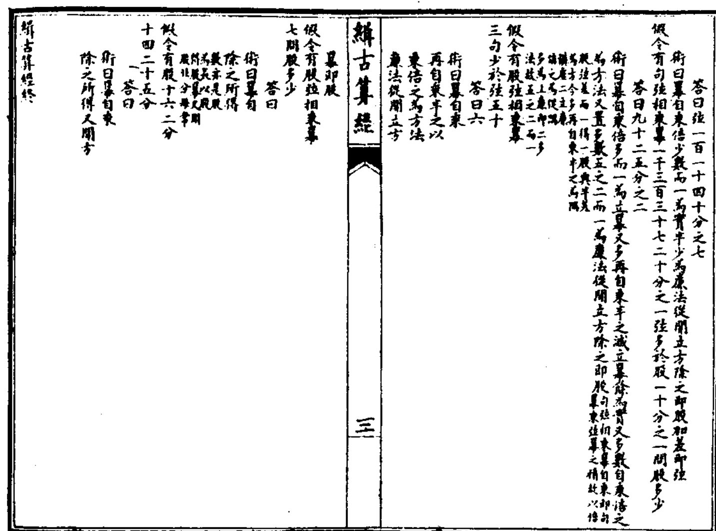
王孝通对《九章算术》和《缀术》两书进行过极深入地研究，指出了前者存在不足，譬如《九章算术·商功章》“有平地役功受袤之术。至于上宽下狭、前高后卑，正经之内阙而不论。致使今代之人不达深理，就平正之间同欹邪之用。”于是批评说：“斯乃圆孔方枘，如何可安。”对于后者则指出了缺陷和错误。就是在这基础上，他“遂于平地之余，续狭斜之法，凡二十术”，完成《缉古算术》一书。

现传《缉古》一书确实是 20 道题，但是在《旧唐书》和《新唐书》都称《缉古算术》四卷，王孝通撰，后者又称“李淳风注”。现传本并没有李淳风注，仅有王孝通自注。

《缉古算术》问世不久就遇上了国家大兴数学教育、注释数学教科书之机。此事主要由李淳风等负责，于是把该书列为数学教科书，被收入的共有 10 种，每种在每卷开始都有“唐朝议大夫行太史令上轻车都尉臣李淳风等奉敕注释”一行字样；有的书没有注释也写这行字，如《孙子算经》就是一例。对《缉古算术》可能也是这样，后人根据这行字著录时便加上“李淳风注”是很自然的事。此次注释后，把书名由《缉古算术》改为《缉古算经》，以后一直沿用。

王孝通是一位非常自信的人。他对自己的著作确信无疑，并敢于向皇帝说：“请访能算之人考论得失，如有排其一字，臣欲谢以千金。”今本《缉古算经》存在一些误文夺字等现象，一般是在流传中产生的。是不是原著任何问题都没有呢？也难下这样结论。

《缉古算经》在流传中，唐代当有大量抄本，北宋有雕版印刷的线装本，南宋又进行翻刻，后来逐渐减少。到清代时仅有的孤本已残损不全，最后 4 问缺少下半截，第 17 问缺王孝通自注一部分，问、答、术尚完整，后 3 问连题目都不全了。为了说明问题，现将清代微波榭本的后 4 问影印于下：


答曰弦一百一十四十分之七
術曰冪自乘倍少數而一爲實半少爲廉法從開立方除之即股加差即弦
假令有句弦相乘冪一千三百三十七二十分之一弦多於股一十分之一問股多少
答曰九十二五分之二
術曰冪自乘倍多而一爲立冪又多再自乘半之減立冪餘爲實又多數自乘倍之爲方法又置多數五之二而一爲廉法從開立方除之即股
假令有股弦相乘冪
三句少於弦五十
答曰六
術曰冪自乘
再自乘半之以
乘倍之爲方法
廉法從開立方
緝古算經　三
冪即股
假令有股弦相乘冪
七問股多少
答曰
術曰冪自
除之所得
假令有股十六二分
十四二十五分
答曰
術曰冪自乘
除之所得又開方
緝古算經終

据微波榭本翻印本

由于有这些残缺，后人不断进行校补，有的差不多补全，如 18 问、20 问，而 17，19 两问的自注因缺字太多，难于校补。最

早校补而得到承认者主要是清代张敦仁(1754～1834)的工作[1]，第17问他未补，18，20两问的校补是：

第18问：

"假令有股弦相乘幂，四[2]千七百三十九、五分之三，勾少于弦五十四、五分之二。问：股多少？"

"答曰：六十八。"

"术曰：幂自乘，倍少数而一，为立幂。又少数再自乘，半之，以减立幂，余为实。又少数自乘，倍之，为方法。又置少数五之二而一，为廉法，从。开立方除之，即勾。加差即弦。弦除幂即股。"

第20问：

"假令有股十六、二分之一，勾弦相乘幂一百六十四、二十五分之十四。问：勾多少？"

"答曰：勾分、五分之四。"

"术曰：幂自乘为实。股自乘为方法，从。开方除之，所得，又开方即勾。"

第19问的正文部分也补全，但注文未补，即

"假令有股弦相乘幂七百二十六，勾七、十分之七。问：股多少？"

"答曰：股二十六、五分之二。"

"术曰：幂自乘为实。勾自乘为方法，从。开方除之，所得，又开方即股。"

以上3问的校补均为后人所接受。如李俨、严敦杰，他们又

---

[1] ［清］张敦仁《缉古算经细草》卷下。

[2] 加方框之字为张敦仁补上的，下同。

对17，19两问的注文予以校补①。钱宝琮对17问的注文评价说，因“缺字很多，实难补足，只得阙疑。”对19问也说：“王孝通自注缺文太多，不予补足。”因此都打方框空着②。正文部分则采纳了张敦仁的校补。对于17，19两问的注文，王荣彬再次进行补足，对李俨和严敦杰的工作提出不同意见，并提出要遵循三个原则，即必须按照各本尚能确定的缺字空位数进行校补；必须和算经中的经文、术文原意相符；所补文字必须和王孝通的前后行文习惯一致。他还用计算和图形进行解释③，说明自己校补的正确性。还要注意，古书上不使用标点符号，但每行有时根据情况起头有低几格的做法，低多少格没有任何规定。

对于《缉古算经》缺文校补是否已经结束，尚不敢肯定，不过可以告一段落。至于该书残缺的年代和原因等，李迪已作为中国数学史未解决问题提出④，难度更大。

《缉古算经》是一部重要数学著作，有名于世，其存在残损实为遗憾。

王孝通于唐初在国家天文机构工作，但无天文历法专著，仅在《缉古算经》中有一问(即第1问)为天文问题，系与《九章算术》均输章“犬追兔术”相似的算术题。他的天文水平，钱宝琮认为在认识上是保守的⑤，上面提到对傅仁均的反驳就证明了此点。但这并不影响他在数学方面的伟大成就。

---

① 李俨．中国古代数学史料．上海：中国科学图书仪器公司，1954．136～139

② 钱宝琮校点．算经十书(下册)．北京：中华书局，1963．525～527

③ 王荣彬．王孝通《缉古算经》自注佚文校补。见：李迪．数学史研究文集(第一集)．呼和浩特：内蒙古大学出版社；台北：九章出版社，1990．50～55

④ 李迪．中国数学史中的未解决问题。见：吴文俊．中国数学史论文集(三)．济南：山东教育出版社，1987．10～27．按：该文的第五部分的第7还包括造仰观台问题等。

⑤ 钱宝琮．缉古算经提要．载钱宝琮校点（同②487页）．

第二节　几何问题代数化解法

《缉古算经》20 问中除第 1 问为天文历法问题，而用算术求解外，全是几何问题，并都使用代数方法求解，即将几何问题代数化。19 问包括 2 个 2 次方程、25 个 3 次和 2 个 4 次方程，它们的分布如下表：

表 4.2.1　《缉古算经》方程数统计表

次＼题	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	合计
2		1		1																2
3	4	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1			25
4																		1	1	2
合计	4	3	2	2	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	29

书中的 19，20 两问给出的是 4 次方程，但在求解时是“开方除之，所得，又开方”，变成了二次开平方，即按 2 次方程求解两次。二次方程的第二次，都是二项，即

$$x^2=N。$$

求 x 就是开平方，所以王孝通在给出常数项 N 之后，便说“开方除之”。这是人们早已熟知的算法，不占重要地位，本章之末将给出一例。由此可知，《缉古算经》中最突出的成就是关于三次方程问题。

所有的三次方程，王孝通都是先求出常数项、一次项和二次项系数，分别叫“实”、“方法”和“廉法”，还有最高次(三次)项叫做“隅”（未明说），而“开立方除之”即暗含隅项，且系数为

"1"。在"廉法"之下，常加一"从"字，表示该项为正。因而，有 23 个三次方程属于

$$x^3+px^2+qx=N$$

型。另两个方程为 $q=0$ 型。至于如何求解，王孝通只说"开立方除之"，未做任何进一步说明，也许他觉得没有必要细说。

下面以第 3 问为例说明王孝通是怎样建立方程的。该题是：

"假令筑堤，西头上、下广差六丈八尺二寸，东头上、下广差六尺二寸，东头高少于西头高三丈一尺，上广多东头高四尺九寸，正袤多于东头高四十七丈[1]六尺九寸。甲县六千七百二十四人，乙县一万六千六百七十七人，丙县一万九千四百四十八人，丁县一万二千七百八十一人。四县每人一日穿土九石九斗二升。每人一日筑常积一十一尺四寸十三分寸之六。穿方一尺得土八斗。古人负土二斗四升八合，平道行一百九十二步，一日六十二到。今隔山渡水取土，其平道只有一十一步，山斜高三十步，水宽一十二步。上山三当四，下山六当五，水行一当二。平道踟蹰十加一，载输一十四步。减计一人作功为均积，四县共造，一日役毕。今从东头与甲，其次与乙、丙、丁。问：给斜、正袤，与高，及下广，并每人一日自穿、运、筑程功，及堤上、下高、广各几何？"

"答曰：

一人一日自穿、运、筑程功四尺九寸六分。

西头高三丈四尺一寸，

　上广八尺，

　下广七丈六尺二寸。

东头高三尺一寸，

　上广八尺，

　下广一丈四尺二寸。

---

① "四十七丈"各本均误为"四百七十"，今以意校改。

正袤四十八丈，
斜袤四十八丈一尺。
甲县正袤一十九丈二尺，
　斜袤一十九丈二尺四寸，
　下广三丈九尺，
　高一丈五尺五寸。
乙县正袤一十四丈四尺，
　斜袤一十四丈四尺三寸，
　下广五丈七尺六寸，
　高二丈四尺八寸。
丙县正袤九丈六尺，
　斜袤九丈六尺二寸，
　下广七丈，
　高三丈一尺。
丁县正袤四丈八尺，
　斜袤四丈八尺一寸，
　下广七丈六尺二寸，
　高三丈四尺一寸。”

这道题比较复杂，答案就有 25 个之多。内容是要由四个县的民工共同修筑一条堤坝。在已知条件中有些不起作用的规定，如“上山三当四，下山六当五，水行一当二”，计算时不用。题中没有给出堤的长、宽、深等数据，而是给了各种差。堤的形状是一个拟柱体，它的上顶呈水平的长方形，东西两头垂直于水平面，而下底则东头比西头窄，但端面都呈等腰梯形，如图 4.2.1 所示。四个县分段同时进行施工，一日完成。

设 $ABCD$ 为堤的东头，$A'B'C'D'$ 为堤的西头，东头上、下广及高为 a，b，h，西头上、下广及高为 a'，b'，h'。正袤为 l，斜袤为 l'，都是未知数，但是给出了

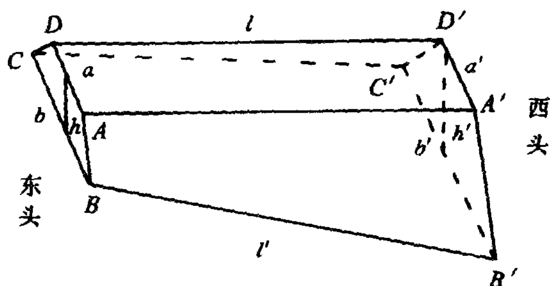


图 4.2.1

$b'-b=6.82$ 丈，$b-a=0.62$ 丈，

$h'-h=3.10$ 丈，$a-h=0.49$ 丈，

$l-h=47.69$ 丈。

还有一个规定，就是在一日中每个民工的工作量都相等，因此在给出各县人数的条件下所要求的答案便比较容易计算。

解法分为四步。

第一步"求人到程功，运、筑积尺术"和第四步"求堤都积术"都不用方程，不予讨论。

第二步"求堤上、下广及高、袤术"：

"一人一日程功乘总人为堤积。以高差乘下广差，六而一，为鳖幂。又以高差乘小头广差，二而一，为大卧堑头幂。又半高差乘上广多东头高之数，为小卧堑头幂。并三幂为大小堑鳖率。乘正袤多小高之数，以减堤积，余为实。又置半高差，及半小头广差与上广多小头高之数，并三差，以乘正袤多小头高之数。以加率为方法。又并正袤多小高、上广多小高及半高差，兼半小头广差加之为廉法，从。开立方除之，即小高。加差即各得广、袤、高。又正袤自乘、高差自乘并，而开方除之，即斜袤。"

其中"小头"、"大头"分别指东头、西头。

根据上引术文，有

鳖幂：$\frac{1}{b}(b'-b)(h'-h)$，

大卧堑头幂：$\frac{1}{2}(b-a)(h'-h)$，

小卧堑头幂：$\frac{1}{2}(a-h)(h'-h)$。

令它们之和为 S，则

大小堑鳖率：

$$S=\frac{1}{b}(b'-b)(h'-h)+\frac{1}{2}(b-a)(h'-h)+\frac{1}{2}(a-h)(h'-h),$$

半高差：$\frac{1}{2}(h'-h)$，

半小头广差：$\frac{1}{2}(b-a)$，

上广多小头高：$a-h$。

令它们之和为 L，则

$$L=\frac{1}{2}(h'-h)+\frac{1}{2}(b-a)+(a-h)。$$

又设堤积为 V，由术文有方程

$$h^3+[L+(l-h)]h^2+[L(l-h)+S]h=V-S(l-h)。$$

令 $L+(l-h)=p$，$L(l-h)+S=q$，$V-S(l-h)=N$，

则有

$$h^3+ph^2+qh=N。$$

这就是以西头(小头)高 h 为未知数的三次方程。

该问求“斜袤”是利用勾股定理，即

$$l'=\sqrt{l^2+(h'-h)^2}。$$

第三步是求各县所承担堤段的高、广、正袤、斜袤方法。对甲县有详细术文，即

“求甲县高、广、正、斜袤术曰：以程功乘甲县人，以六因取积。又乘袤幂，以下广差乘高差为法除之，为实。又并小头上、下

广，以乘小高，三因之为垣头幂。又乘袤幂，如法而一，为垣方。又三因小头下广，以乘正袤，以广差除之，为都廉，从。开立方除之，得小头袤，即甲袤。”

这里所说的甲县高、广，因甲县从东端算起，故系指所截那端的高、下广。设为$h_{甲}$、$b_{甲}$，正袤为$l_{甲}$，体积为$V_{甲}$，于是由术文有

$$l_{甲}^3+\frac{3bl}{b'-b}l_{甲}^2+\frac{3(a+b)hl^2}{(b'-b)(h'-h)}l_{甲}=\frac{6V_{甲}\,l^2}{(b'-b)(h'-h)}。$$

这就是以$l_{甲}$为未知数的三次方程。求得$l_{甲}$之后即可求得$h_{甲}$、$b_{甲}$，同样也可用勾股定理求出“斜袤”$l'_{甲}$。

乙、丙、丁三县的高、广等也仿此求之。

再举第15问为例。原题是：

“假令有勾股相乘幂七百六、五十分之一，弦多于勾三十六、十分之九。问：三事各多少？”

即求勾、股、弦。其术文为

“幂自乘，倍多数而一，为实。半多数为廉法，从。开立方除之，即勾。”

其中没有“方法”，即缺一次项，其系数$q=0$。

本问是先求勾a，设为x，则有

$$x^3+\frac{(c-a)}{2}x^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)},$$

亦即$x^3+px^2=N$型三次方程。

以上所举三术，在叙述上都是直接给出了方程的“实”、“方法”和“廉法”，而未说是如何想到的，有的在自注中有说明。如第3问第三术求甲县所筑堤段之正袤长，即从西头截下一段之截袤长，自注特别清楚：

“此平堤在上，羡除在下。两高之差即除高。其除两边各一鳖腰，中一堑堵。今以袤再乘六因积，广差乘袤差而一，得截鳖腰袤再自乘为立方一。又堑堵袤自乘为幂一，又三因小头下广，大

袤乘之，广差而一，与幂为高，故为廉法。又并小头上、下广又三之，以乘小头高为头幂，意同六除。然此头幂，本乘截袤。又袤乘之，差相乘而一。今还依数乘除一头幂为从。开立方除之，得截袤。”

这里首先考虑的是立体的体积，反求其截袤。该段拟柱体和整个堤一样，可以过小头的底边作一平行于上顶面的平面，于是把堤分为上下二部分，上部为“平堤”，即底为等腰梯形的直棱柱（图 4.2.2(a)），下部为一“羡除”（图 4.2.2(b)）。羡除又是由二个“鳖腰”（图 4.2.2(b)之 b_1 和 b_2）与一个“堑堵”（图 4.2.2b 和 b_0）合成。实际上，两个鳖腰合成一个鳖臑。它们的体积分别为

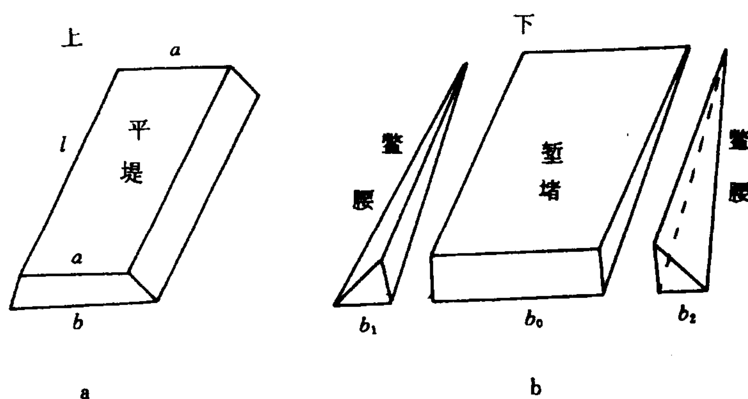


图 4.2.2

平堤：$\frac{1}{2}(a+b)hl_{甲}$，

堑堵：$\frac{1}{2}b'_1(h_{甲}-h')l_{甲}$，

鳖腰：$\frac{1}{6}(b_{甲}-b')(h_{甲}-h')l_{甲}$。

于是有

$$V_{甲}=\left[\frac{1}{2}(a+b)h+\frac{1}{2}b'(h_{甲}-h')+\frac{1}{6}(b_{甲}-b')(h_{甲}-h')\right]l_{甲}。$$

但是 $h_{甲}-h'=\frac{l_{甲}(h'-h)}{l}$，$b_{甲}-b'=\frac{l_{甲}(b'-b)}{l}$。代入上式，经整理就得到"实"、"方法"和"廉法"，亦即得到第三术的三次方程。

这样考虑问题的方法，不仅适用于第 3 问的第二术，而且显然有普遍意义。

在得到三次方程之后如何求解呢？王孝通只是说"开立方除之"，再未作任何解释。可以肯定地说他不可能有什么非常高妙的方法，而是沿袭从《九章算术》以来的"开立方术"。事实上，开立方术求根的第二位数时已是一个一般性的三次方程，只不过是由于缩根变而使各项系数扩大为 10^n 倍而已，如

$$1\,000x_1^3+30\,000x_1^2+300\,000x_1=860\,867$$

就是由 $x^3=1\,860\,867$ 而来。再往下解就是解一般三次方程了。

刘徽从几何意义上把三次项系数叫"隅"，二次项系数叫"廉"，王孝通的叫法即由此来。王孝通与前人不同的是，其三次方程是独立的，即不是来自开立方。因此他的三次方程在数学上占有重要地位，得到了较高评价。三上义夫说："三次方程式，在阿拉伯算学上，乃甚显著之事，然中国成立三次方程式，乃在阿拉伯之前；而由术文[①] 推得之方程式解法，亦与发达于阿拉伯者全不同也。"[②]

---

① "术文"指《缉古算经》中之术文。

② 三上义夫．中国算学之特色．中译本．见：《万有文库》本．第二版．上海：商务印书馆，1924．34

第三节　“造仰观台”题分析

《缉古算经》第 2 问“造仰观台”具有特殊性。所谓“仰观台”就是天文台。王孝通任职国家天文研究机构，对天文台的形状等很熟悉，设立一道数学题很有意义。该题是：

“假令太史造仰观台，上广袤少，下广袤多。上下广差二丈，上下袤差四丈，上广袤差三丈，高多上广一十一丈。甲县差一千四百一十八人，乙县差三千二百二十二人，夏程人功常积七十五尺，限五日役台毕。羡道从台南面起，上广多下广一丈二尺，少袤一百四尺，高多袤四丈。甲县一十三乡，乙县四十三乡，每乡别均赋常积六千三百尺，限一日役羡道毕。二县差到人共造仰观台，二县乡人共造羡道，皆从先给甲县，以次与乙县。台自下基给高，道自初登给袤。问：台道广、高、袤，及县别给高、广、袤各几何?”

答案有 27 项，略去。

根据上述引文，仰观台由台的主体和“羡道”两部分组成。台体是一个上小下大的长方台体，其顶端为平面，天文学家在上进行天文观测；羡道是登仰观台的斜道，人通过它登上台顶。可是题中有的地方不好理解，如羡道的上广比下广多 1 丈 2 尺，又经计算发现羡道的一端不是垂直于地面的，而是斜收(如图 4.2.3)。

把羡道垂于台体的南侧相连，即使南侧面是垂直的，两者也不能粘合，而是分开的，如图 4.2.4 是从东向西观看的样子。显然是不合理的，因为这样天文学家无法登台，连王孝通也不能上到台顶。

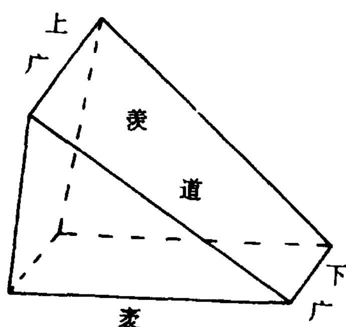


图 4.2.3

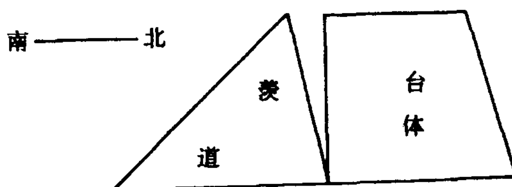


图 4.2.4

上面的这个问题从清代以来，一直困扰着研究《缉古算经》的学者。最近郭世荣圆满地解决了这个问题①。其实很简单，羡道不是南北向，而是东西向，一个侧面紧贴台体的南侧面，此侧面不是上下垂直而是向里(北)收。(如图 3.2.5)这样，羡道上宽下窄和端面向里收的形状便是当然的、毫不奇怪的事。

该问有 4 术，前 3 术得 $x^3+px^2+qx=N$ 型方程，最后一术为 $x^3+px^2=N$ 型方程。现以第一术为例进行分析：

“以程功尺数乘二县人，又以限日乘之，为台积。又以上下袤

① 郭世荣.《缉古算经》造仰观台新释. 自然科学史研究，1994，13(2)：106～113

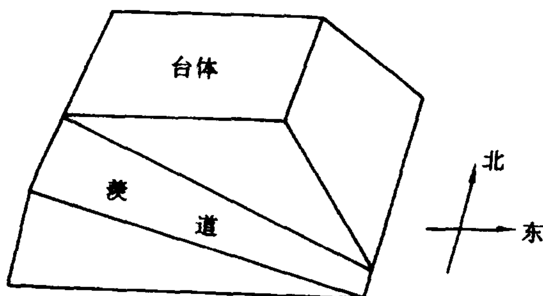


图 4.2.5

差乘上下广差，三而一为隅阳幂。以乘截高为隅阳截积。又半上下广差乘斩上袤为隅头幂，以乘截高为隅头截积。并二积以减台积，余为实。以上下广差并上下袤差，半之为正数。加截上袤，以乘截高，所得，增隅阳幂加隅头幂，为方法。又并截高及截上袤与正数，为廉法，从。开立方除之，即得上广。各加差，得台下广及上下袤、高。”

设仰观台的上广、上袤分别为a，b，下广、下袤分别为c，d，高为h，羡道上、下广分别为e_1，e_2。它们都是未知数，但题中给出了：

上下广差：$c-a$，

上下袤差：$d-b$，

上广袤差：$b-a$，

高多上广(截高)：$h-a$。

又设台的体积为V。根据上引术文和图 4. 2. 6 可以看出：台体是由 3 组立体组成，即四隅各一“阳马”、南北两侧各 1 个“堑堵”、中间的部分为一底为梯形的四棱柱。四个阳马是：北端的两个相等，底面的长、宽分别是$\frac{1}{2}(d-b)$，$\frac{1}{2}(c-a)-\frac{1}{2}(e_1-e_2)$；南端的两个也相等，它们底面的长、宽分别为$\frac{1}{2}(d-b)$，$\frac{1}{2}(c-a)-$

$\frac{1}{2}(e_1-e_2)$。设四阳马的体积为 V_1，则有

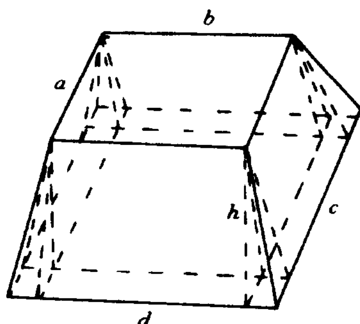


图 4.2.6

$$V_1=\frac{2}{3}\left\{\left[\frac{1}{2}(d-b)\right]\left[\frac{1}{2}(c-a)-\frac{1}{2}(e_1-e_2)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}(d-b)\right]\left[\frac{1}{2}(c-a)+\frac{1}{2}(e_1-e_2)\right]\right\}h。$$

把 h 改为 $(h-a)+a$，且令上广 a 为 x，则上式经整理为

$$V_1=\frac{1}{3}(d-b)(c-a)(h-a)+\frac{1}{3}(d-b)(c-a)x,$$

其中王孝通称右端第一项为“隅阳截积”，第二项系数为“隅阳幂”。

南北两侧的堑堵，其底长均为 b，它们的高为 h，底宽之和正好是 $c-a$（图 4.2.7），共同的体积 V_2，有

$$V_2=\frac{1}{2}b(c-a)h=\frac{1}{2}\left[(b-a)+x\right](c-a)\left[(h-a)+x\right]$$
$$=\frac{1}{2}(c-a)x^2+\left[\frac{1}{2}(c-a)(b-a)+\frac{1}{2}(c-a)(h-a)\right]x+$$
$$\frac{1}{2}(c-a)(b-a)(h-a)。$$

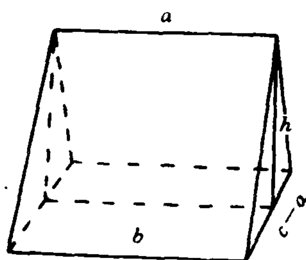


图 4.2.7

其中右端的$\frac{1}{2}(c-a)(b-a)$为术文中的“隅头幂”，而$\frac{1}{2}(c-a)(b-a)(h-a)$（常数项）为“隅头截积”。

中间的部分就是放倒了的四棱柱，其垂直立面呈梯形，即四棱柱的底（如图 4.2.8）。它的体积 V_3 为

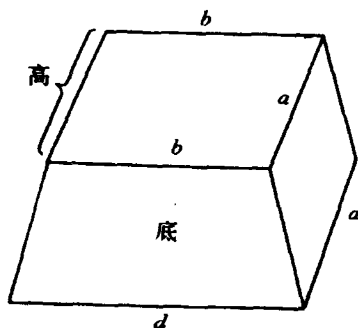


图 4.2.8

$$\begin{aligned}V_3 &= \frac{1}{2}(d+b)h\ a\\&=\left\{\left[\frac{1}{2}(d-b)+(b-a)+x\right]\left[(h-a)+x\right]\right\}x\\&=x^3+\left[(h-a)+\frac{1}{2}(d-b)+(b-a)\right]x^2\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{1}{2}(d-b)+(b-a)\right](h-a)x。$$

把 V_1，V_2 和 V_3 加起来，就是 V。经过整理为

廉法 $p=(h-a)+(b-a)+\frac{1}{2}\left[(c-a)+(d-b)\right]$，

方法 $q=\left\{\frac{1}{2}\left[(c-a)+(d-b)+(b-a)\right](h-a)\right\}+\left[\frac{1}{3}(d-b)(b-a)+\frac{1}{2}(c-a)(b-a)\right]$，

实 $N=V-\left\{\frac{1}{3}\left[(c-a)(d-b)(h-a)\right]+\left[\frac{1}{2}(c-a)(b-a)(h-a)\right]\right\}$。

得三次方程

$$x^3+px^2+qx=N。$$

解之，得 $x=7$（丈），即 $a=7$ 丈。

有了 a，则 b，c，d，h 均可求得。它们分别是 $b=10$ 丈，$c=9$ 丈，$d=14$ 丈，$h=18$ 丈。

用同样方法可求出羡道上广、下广、袤、高，分别是 3.6 丈、2.4 丈、14 丈、18 丈。由此知羡道的袤与台体的袤相等，高与台体的高相等，正好与台体的数据相合。

《缉古算经》的最后 6 问（15～20）均由勾股形的有关计算构成。前面已举过第 15 问，下面再看一下第 20 问：

“假令有股十六、二分之一，勾弦相乘幂一百六十四、二十五分之十四。问：勾多少？”

“答曰：勾八、五分之四。”

“术曰：幂自乘为实。股自乘为方法，从。开方除之，所得，又开方即勾。”

设所求之勾为 x，由术文应有

$$y^2+(16\,\frac{1}{2})^2y=(164\,\frac{14}{25})^2,$$

其中 $y=x^2$。解此方程得 $y=77.44$，即 $x^2=77.44$，再开平方得 $x=8.8=8\frac{4}{5}$。可视为

$$x^4+(16\frac{1}{2})^2x^2=(164\frac{14}{25})^2$$

型四次方程。

在唐宋颇受重视的《缉古算经》，北宋和南宋都有刊本，但是在元、明两朝几乎完全散佚。明末只有章丘李开先(1502～1568)家中收藏一本南宋刊本。后来毛晋(1599～1659)得到这本书，连同他搜集到的宋刻本《九章算术》、《周髀算经》等七种算书，因其“雕工精美”且有宋元丰七年(1084年)署名，“因求善画者刻画影摹，不爽毫末，什袭而藏之”，还要等到找得《海岛算经》、《五经算术》和《缀术》后，合在一起，“并得好事者，刊刻流布”[①]。他并未达到目的，可是他手里有宋刻本和影抄本《缉古算经》等书七种。后来归他后人毛扆(1640～?)的汲古阁收藏，乾隆时七种宋本书又落到孔继涵(1739～1783)处，他说“今得毛氏汲古阁所藏宋元丰京监本七种，又从戴东原先生所辑《永乐大典》中《海岛》、《五经算》，而十书备其中，旧附一，今附三而并梓之”[②]。孔继涵刊刻的就是微波榭本，从此《缉古算经》有了刊本，流传自然大大扩大。又，同时在《四库全书》收入《缉古算经》一卷，系吏部侍郎王杰(1725～1805)家藏本，即毛晋所影抄者。

上述的影抄和微波榭本《缉古算经》都有基本相同的残损[③]，

---

① ［清］毛扆《算经跋》(1684年)。

② ［清］孔继涵《算经十书·序》。

③ 第18问，微波榭本术文完整，《天禄琳琅丛书》本缺“自乘”、“倍之”、“法从”，自注也缺“乘勾”、“积故以”。第19问，微波榭本“答曰”一行以下无字，《天禄琳琅丛书》本则为“答曰二十”，多“二十”二字。其余全同。为什么出现这种差别？目前还不清楚。

可见在毛扆之前即已如此，就连这本残损的宋刻本后来也不知下落(孔继涵之后失传)，而影抄本则保存在北京故宫博物院，并有《天禄琳琅丛书》影印本。

第三章　隋、唐数学教育与李淳风

第一节　隋、唐数学教育制度

一　民间教育与官方教育

中国古代的数学教育有民间和官方两种形式。官方教育早在周代就开始了。《周礼》记载“教民六艺”——礼、乐、射、御、书、数，其中的数指数学，又称“九数”。郑玄注《周礼》称，九数即方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、盈不足、旁要。这与《九章算术》篇名基本相同，所以刘徽说：“九数之流则《九章》是矣。”虽然郑说不十分准确，有的内容(如均输)显然是后增的，但还是大体上反映了当时数学教育的范畴。这种九数教育亦是汉代数学教育的主要内容。《前汉书·食货志》称“八岁入小学，学六甲、五方、书计之事。”其中的“计”便指九数(王应麟《困学纪闻》:“学书计,六书九数也。”)。另外,国家的天文官——太史，也有向属员传授数学知识的职责。但直到隋代以前，官方教育并未形成制度，民间教育一直是数学教育的主要形式。

春秋战国时代兴起的“私学”曾在秦代被取缔。汉代尊崇儒学，儒家私人讲学之风再盛。虽然相对来讲，数学不受重视，但在民间还是不乏以私学形式传授数学者。《数术记遗》的作者曾自叙其向刘洪受业经过：“遂负帙游山，……乃于太山见刘会稽(即刘洪)，博识多门，遍于数术。余因受业，颇染所由。余时问曰：‘数有穷乎?’会稽曰：‘吾曾游天目山中，见有隐者，世莫知其名，号曰天目先生。余亦以此意问之。……”这种私学传授，在战乱

期间亦不间断，例如南北朝时北齐张子信“因避乱隐于海岛中，积三十许年，专以浑仪测候日月五星差变之数，以步算之。”[①] 后来以其天算知识授张孟宾。南朝数学家祖暅到北方后，以其学授信都芳。张、信后来都成为知名的数学家。北魏的算生博士殷绍，也是到长广（今山东平度）道人法穆处学习《九章算术》后而成才的[②]。至于以“家业世传”的数学家，当时也有不少，最著名的是祖冲之父子。史称祖暅“少传家业，穷极精微”[③]，他的数学成就是与父亲祖冲之的教育分不开的。实际上，中国古代的许多数学成就来自民间，应归功于私人教育。只是由于史官对这些人不重视，所以许多杰出的数学家及数学教育工作者未留下姓名。祖冲之之所以在史书上有传，主要是由于他担任过较高的官职。《周髀算经》、《九章算术》等数学名著，甚至连作者姓名都未留下。《孙子算经》的作者之名也不清楚。

毫无疑问，古代的民间教育对数学家的成长及数学理论的发展起了重大作用。这种作用，突出地表现在专门数学著作的不断出现。唐代选作教材的10种算书，有7种是隋代之前成书的，即《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《张邱建算经》[④]、《夏侯阳算经》、《孙子算经》、《缀术》，其中后四种都成书于四五世纪。除此以外，流行于当时而后失传的算书还有不少。这些著作水平不一，但都以应用为主，以计算见长，总体上已形成以算筹为计算工具的比较完整的初等数学体系。这便为国家开办系统的数学教育创造了条件。而在经济、文化已有相当发展的封建国家中，这种教育也是国家的需要。首先，封建王朝对历法十分重视，而制

① ［清］阮元《畴人传》卷十一“张子信传”。

② 《北史》卷八十九“殷绍传”。

③ 《南史》卷七十二祖冲之，子暅之。

④ 原为《张丘建算经》，后人为避孔丘之名讳，改为《张邱建算经》。

订历法离不开数学。其次，各级官吏为了有效地进行管理，必须掌握一定的数学知识。仅靠民间教育培养出来的数学人才，满足不了国家需要，而且不便于国家掌握和任用。所以，由朝廷举办数学教育便是顺理成章的了。当然，这种教育的实现需要一个相对稳定的社会环境。在战乱频繁的社会中，统治者的当务之急是镇压敌对势力，巩固政权，不可能把数学教育提到议事日程上来。而在长期的战乱之后，隋代出现了比较安定的局面，这便为国家教育的实现提供了社会条件。正是在数学本身及社会两方面条件具备的情况下，隋代开始实行国家数学教育的。

二　隋代数学教育制度

我国古代数学教育制度是在隋代形成的。隋文帝时期建立的国子寺，是当时的最高学府，相当于国立综合大学。《隋书》称："国子寺，统国子、太学、四门、书算学，各置博士，国子、太学、四门各五人，书、算各二人。助教，国子、太学、四门各五人，书、算各二人。学生，国子一百四十人，太学、四门各三百六十人，书四十人，算八十人。"① 《旧唐书》亦载："隋始置算学博士二人于国庠。"② 自古以来，官方数学教育仅限于小学。隋代将数学教育列于国学，其学生人数甚至超过书学，这一事实反映了魏晋以来数学的高度发展，同时也说明国家对数学人才的需要。

隋代以前，以数学教育获得品级者，不见记载。隋代则明确规定国子寺中的算学博士为九品官。《隋书》载："书算学博士为从九品。"唐玄宗撰《唐六典》卷二十一亦称："魏晋以来，(数学教育)多在史官，不列于国学。隋置算学博士一人，从九品下。"《唐六典》所载当是隋文帝时代的情况。隋炀帝即位后，对官阶进

① 《隋书》卷二十八"百官志下"。

② 《旧唐书》卷四十四"选举志上"。

行了改革，“品自第一至于第九，唯置正从，而除上下阶”[①]，并将国子寺改为国子监。算学博士增加到二人，为从九品，仍是最低一级的官员。

在国子寺或国子监中，属自然科学的仅算学一科，可以说有独立的“数学系”。其他学科，如天文、医学、农学、工程技术等均未列入，这说明在科学技术领域内，数学还是比较受重视的。但国子、太学、四门的博士品级比算学高得多，如国子学博士为正五品。数学教师的地位远不能与经史教师相比。

隋代数学教育制度初立，尚不详备。学习年限、课程等均无史料可考。这一制度是在唐代发展和完善起来的。

三 唐代数学教育制度

唐建国后，继承和发展了隋代教育制度，包括数学教育。《新唐书》载：“唐制，取士之科，多因隋旧。……其科之目，有明经、有俊士、有进士、有明法、有明字、有明算。……凡学六，皆隶于国子监。国子学，生三百人。……太学，生五百人。……四门学，生千三百人。……律学，生五十人。书学，生三十人。算学，生三十人。”[②] 这就是说，在最高学府——国子监里，设有包括数学在内的六科，相当于六个系。各科之称，史料记载有所不同，如杜佑《通典》称“唐贡士之制，有秀才、有明经、有进士、有明法、有明书、有明算。”《新唐书》称：国子监祭酒（相当于大学校长）“掌儒学训导之政，总国子、太学、广文、四门、律、书、算凡七学。”[③] 各史书所载，皆有“算”或“明算”科。

---

① 《隋书》卷二十八“百官志下”。

② 《新唐书》卷四十四“选举志上”。

③ 《新唐书》卷四十八“百官志三”。

据《唐会要》，算学是于贞观二年(628 年)置于国学的。[①] 其学校组织，有博士、助教及学生。《新唐书》载："算学博士二人，从九品下，助教一人。"[②] 这与隋代是一致的。只是学生人数比隋代少些。据《唐六典》、《旧唐书》、《新唐书》所载，算学生人数为30 人。

唐代招收学生，对其出身是有限制的。《唐六典》称，算学博士"掌教文武官八品以下及庶人子之为生者"。类似记载见于当时各种史书。例如吴竞撰《贞观政要》卷七称："算学，掌教八品以下及庶人子为俊士生者。"《新唐书》卷四十四称："算学，生三十人，以八品以下子及庶人之通其学者为之。"在国子监各科中，算学生的出身与律学(习律令)或书学(习《说文》、《字林》等)科的学生相当，但远不如国子、太学、四门。国子学(习《周礼》、《毛诗》、《春秋》等儒家经典)的学生出身最高，"掌教三品以上及国公子孙、从二品以上曾孙为生者"。[③]

算学生的入学年龄规定为 14 至 19 岁。教育经费由国家负担，不收学费。但入学时须向老师行"束脩之礼"[④]，即以长幼为序，参拜老师，并交纳一定数量的礼品。据王溥《唐会要》卷三十五所载："国子、太学各绢三匹，四门学绢二匹，俊士及律、书、算学各绢一匹，皆有酒酺。"所交礼品中，博士按规定取五分之三，助教取五分之二。

明算科学制为七年，比国子学(九年)短而比律学(六年)长。学生以《九章算术》等 10 部"算经"为主要教科书。分为两个班，

---

① 《唐会要》卷九十一。

② 《新唐书》卷四十八"百官志三"。

③ 《贞观政要》卷七。

④ 束脩即十条干肉，春秋战国时代学生拜师时常以此为礼品。后来泛指学生给老师之礼。

每班 15 人，“二分其经以为业”[1]。一班学《孙子算经》及《五曹算经》一年，《九章算术》、《海岛算经》三年，《张邱建算经》及《夏侯阳算经》各一年，《周髀算经》及《五经算术》一年；二班学《缀术》四年，《缉古算经》三年。以上为“专业”。另外，两班学生还兼习《数术记遗》和《三等数》。唐代学制比较稳定，《唐六典》、《旧唐书》、《新唐书》、《唐会要》等典籍中的记载都是一致的。如《新唐书》卷三十四：“凡算学，《孙子》、《五曹》共限一岁，《九章》、《海岛》共三岁，《张邱建》、《夏侯阳》各一岁，《周髀》、《五经算》共一岁。《缀术》四岁，《缉古》三岁。《记遗》、《三等数》皆兼习之。”卷四十八则明确地称十部算经为“专业”。显然，一班学生所学是比较基本的数学知识，内容较多；而二班所学则难度较大。但若没有相当于《九章算术》的数学水平，学习《缉古算经》是困难的，更不用说《缀术》了。所以，二班学生亦必有一定时间系统学习中国传统数学。否则，只学《缉古算经》20 题，无论如何是用不了三年的。

算学生考试亦分科进行，合格者由国家统一分配。据载：“其明算，则《九章》三帖，《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张邱建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》等七部各一帖；其《缀术》六帖、《缉古》四帖。录大义本条为问答者，明数造术，辩明术理，然后为通。《记遗》、《三等数》读令精熟。试十得九为第。……诸及第人并录奏，仍关送吏部。书、算于从九品下叙排。”[2] 这就是说，考试合格者均由吏部安排工作，其中优秀者毕业后即可得到九品官阶。

天宝元年(742 年)后，考试方法略有改变。《新唐书》“选举志”称：“试《九章》三条，《海岛》、《孙子》、《五曹》、《张邱

---

① 《新唐书》卷四十八“百官志三”。

② 《唐六典》卷二。

建》、《夏侯阳》、《周髀》、《五经算》各一条，十通六。《记遗》、《三等数》，帖读，十得九为第。试《缀术》、《缉古》，录大义为问答者，明数造术，详明术理，无注者合数造术，不失义理，然后为通。《缀术》七条，《缉古》三条，十通六。《记遗》、《三等数》，帖读，十得九为第。”与前相比，表现在对《缀术》更为重视。它显然是十部算经中最为高深的一部。

算学生同国子监的其他学生一样，每旬(10 天) 放假一日。假前由博士进行测验，“读者千言试一帖……讲者二千言问大义一条，总三条通二为第，不及者有罚。”[①] 每年有两个假期，五月放“田假”，九月放“授衣假”。家在外地的学生可用此机会探亲，但须按要求回校。无故迟到 30 天，或因意外事故误期百天，因病或照顾家属误期 200 天，“皆罢归”，即令其退学。每年年底都要进行口试，根据一年的讲授“口问大义十条。通八为上，六为中，五为下。”累计三年为下者，令其退学。

除国学外，各州亦有公立学校。《唐会要》卷三十五称：“诸州县学生，年二十五已下，八品九品子若庶人。”“州县学生当州试，并选艺业优长者为试官，仍长官监试。其试者通计一年所受之业，口问大义十条，得八已上为上，得六已上为中，得五已上为下。”其学制与国学同。优秀者可选送国学，累年不及格者则令退学。另外，“许百姓任立私学，欲其寄州县受业者，亦听。”这就是说，唐代教育分为国学、州(县)学及私学三个层次。至于州(县)学和私学中数学师生的人数、待遇，不见记载。

国子监中数学教师的薪俸则屡见于史书。据《唐会要》，开元二十四年(736 年)规定的百官料钱“都以月俸为名，各据本官，随月给付，一品三十一千，二品二十四千……。算学博士为九品，一

---

① 《新唐书》卷四十四“选举志上”。

千九百一十七文。助教虽无品级，料钱与博士同。”[①] 大历十二年(777 年)规定的百官料钱有所增加，太傅、太保、太尉、司徒等高官，料钱已达 120 贯(一贯为 1000 文)，但书、算博士及助教仍是 1917 文。直到建中二年(781 年)，算学博士及助教的料钱才增至 3000 文。会昌年间(841～845)，算学博士的料钱增至 4000，助教仍为 3000，“会昌后不复增减”。从这些记载可知，唐代数学教育制度，一直延续到唐末。

不过，历代皇帝对教育包括数学教育的重视程度不同，算学之兴衰亦不同。唐太宗比较重视国学，贞观年间(627～649 年)，国学盛况空前。“贞观五年以后，太宗数幸国学、太学，遂增筑学舍一千二百间，国学、太学、四门亦增生员，其书、算各置博士，凡三千二百六十员。……已而高丽、百济、新罗、高昌、吐蕃诸国酋长亦遣子弟入国学。于是国学之内八千余人，国学之盛近古未有。”[②]“贞观十四年(640 年)召天下惇师老德以为学官，数临幸，观释策，广学舍千二百区，益生员至三千二百，自屯营、飞骑皆给博士受经，能通经者，听入贡限，四方秀艾，坌集京师。”[③] 虽然不清楚当时算学馆的实际人数，但肯定大大超过 3000 人。在高宗时期，皇帝曾认为算学及书学、律学“事唯小道，各擅专门，有乖故实”，遂令废之，事在显庆三年(658 年)(《新唐书·百官志》，《唐会要》卷六十六)。大概是由于这一措施受到抵制，四年后，即龙朔二年(662 年)“复置律学、书、算学官”[④]。天宝(742～755)之后，国学渐衰，生徒流散。贞元年间(约 800 年)算学馆又不复存在。李观“请修太学书”称：“在昔学有六馆，生有三千。近季祸

① 《唐会要》卷九十一。

② 《唐会要》卷三十五。

③ 《贞观政要》卷七。

④ 《唐会要》卷六十六。

难，……国子、太学、四门、书、律、算学，今存者三，亡者三。"[①]元和二年(807年)国子监重新定员，已大不如前。据《唐会要》卷六十六载："两京[②] 诸馆学生总六百五十员……算馆十员。"

四　隋唐数学教育的得失

隋代存在时间虽短，但它所建立的数学教育制度为唐代数学教育起了奠基的作用。唐代是封建社会的盛世，历时近300年，数学教育也大体上从唐初延续到唐末。唐代数学教育不仅反映了数学自身的发展，而且反映了社会对数学的需要。唐初经济发展迅速，各行各业都需要数学人才。另一方面，数学又是当时已相当发达的天文学、地学及技术科学(主要是工程技术)的基础。正因为如此，在崇尚文史哲的当时，数学作为唯一的自然科学学科列入国学，而且数学教师有正式官阶，从事其他科学教育者是无此殊荣的。

当然，唐代的国学是教育机构而不是科研机构，我们不应指望校内的数学师生进行开创性的理论研究，更不应指望由它直接培养出数学家来。实际上，唐代数学教育的目的是让学生继承中国传统数学理论，并学以致用，发展社会经济。从整体来看，唐代数学教育达到了预期的目的，是成功的。它为国家培养了大批从事历法、税务、会计、土木工程及土地测量的专业人员。唐代的经济建设以及天文、地学等学科的发展，不能不说是得力于国家培养的数学人才。

唐代数学教育不仅有现实意义，而且有深远的历史意义。我国传统数学在宋元时代发展到顶峰，但追根溯源，是与唐代数学教育分不开的。元末数学家丁巨云："(数学)由唐及宋，皆有专门。

---

① 姚铉《唐文粹》卷二十六。

② 两京指西京长安(今西安)及东都洛阳。

自后时尚浮辞，动言大纲①，不计名物。其有通者，不过胥吏。士类以科举故，未暇笃实。”②这段话真实地道出了唐宋数学的关系：唐代的专门教育延续至宋，是造成宋代数学高涨的重要原因。虽然官学出身的数学家不多，但不应忽视，数学家的出现必须有相应的基础。若把数学比作航船，数学教育便是载船之水。水涨船高，宋代发达的数学教育是数学繁荣的不可缺少的条件。清代数学家李棠说：“其时（指宋）去唐未远，尤兴明算之科。故是学大昌，人皆争趣。”③此话亦反映了唐代数学教育对宋代的影响。而1314年以后，科举考试以朱熹集注的《四书》为主，将数学内容完全取消，国家教育亦无数学。知识分子在当时科举考试的引导下，大多不关心自然科学。我国的数学理论之所以在元末及明代走下坡路，数学教育之废显然是原因之一。

隋唐数学教育对国外亦有较大影响，尤其是日本和朝鲜。

日本远滕利贞所著《日本数学史》称：“推古之朝（602年）百济僧观勒献历及天文书。星历之学与数学相须为用，则汉土数学入我邦，盖以此时为始。天智（661～671）置算博士，及算生二十人。……文武（702年）更置天文博士、历博士及天文历生各十人，算生三十人，此为极盛时代。”

实际上，早在607年，日本天皇就派遣使团来中国了。唐建国后，日本先后19次任命“遣唐使”，每次约100～250人，最多达四五百人。其中包括相当数量的留学生，学习包括数学在内的中国文化。他们把中国的数学教育方法传到日本后，日本政府开始仿唐建立算学制度。662～686年间置算博士2人，算生20人。702年，日本发布“大宝律令”，718年又发布“养老律令”，此令

① 这里的纲指“三纲”：君为臣纲，父为子纲，夫为妻纲。

② [元] 丁巨《丁巨算法序》。

③ [清] 李棠《四元玉鉴跋》。

包括大宝律令的主要内容。这两个律令是日本全面仿唐建立的政治文化法规。养老律令中的“学令”规定：“大学寮置算博士二人，算生三十人。……凡大学生，取五品以上子孙及东西吏部子为之。……年十三以上十六以下。”同时规定了大学寮学生的数学教科书：“凡算经，《孙子》、《五曹》、《九章》、《海岛》、《六章》、《缀术》、《三开》、《重差》、《周髀》、《九司》，各为一经，学生分经习学。”其教学目的亦与唐代相仿，即为国家培养有关历法、天文、货币、土木工程、土地测量、税务、会计等方面的数学人才。上述九书中有六种是唐代国子监中的数学教科书，除《缀术》外，均流传至今。另外四种——《六章》、《三开》、《重差》、《九司》，在中国书目中不曾出现。

日本学生的分班及考试方法也与唐相近：“学生二分其经，以为之业。凡算学生，辩明术理，然后为通。试《九章》三条，《海岛》、《周髀》、《五曹》、《九司》、《孙子》、《三开》、《重差》各一条。试九全通为甲，通六为乙。若落《九章》，虽通六犹为不第。其试《缀术》、《六章》者，准前《缀术》六条，《六章》三条，试九全通为甲，通六为乙。若落经(指《六章》)者，虽通六犹为不第。”(《令义解》)[①] 这就是说，一个班学习较易的七部算书，另一班学习较难的两部算书。学制均为七年。从中可以看出日本对《九章算术》的重视。

日本和算体系的形成，是与它仿唐而立的数学教育制度分不开的。这种制度对日本数学的普及与发展起了重要作用。

7 世纪时，朝鲜也仿照唐制建立国学。朝鲜人金富轼著《三国史记》卷三十八称：“国学属礼部，神文王二年(682 年)置，景德王(742 年)改为大学监。”大学监内设算学博士及助教，“以《缀

① 李俨. 唐宋元明数学教育制度. 见：《中算史论丛》第四集. 北京：科学出版社，1955

经》、《三开》、《九章》、《六章》教授之。”其中《缀经》为《缀术》，《九章》为《九章算术》，都是唐代的数学教科书。朝鲜学制为九年，毕业考试合格者由国家安排工作。

综上所述，唐代数学教育的成就及影响确实很大。但另一方面，这种教育亦有不可忽视的弊病。

首先，在国学之中，数学处于明显的次要地位，数学教师的官阶、待遇及学生的出身都是比较低的。这自然影响了数学教学的积极性。不过，我们不能简单地归咎于唐代。历史地看，这是自汉以来统治阶级重儒轻技的必然结果。儒家一向视数学为“六艺之末”，虽知其不可缺，但却不予应有的重视。唐代的数学教育较前代发达，也未能摆脱儒家思想的这种束缚。

其次，唐代数学教育缺乏合适的教科书。十部算经是中国传统数学的精华，但严格来说并不适于教学。教科书的基本要求是知识的系统性和循序渐进，这十部书并不具备这些特点。有的是高水平的学术著作，如刘徽注《九章算术》，祖冲之、祖暅的《缀术》；有的则是普及性著作算题集，如《孙子算经》、《五曹算经》等。李淳风等人的注释使十部算经向教材的方向迈进了一步，但由于未突破原书体例，不可能有根本的改变。可以设想，如果组织人力编写由浅入深的教科书，待学生系统掌握之后再研读古代的数学经典，选做其中的数学名题，效果会好得多。

第二节　李淳风与十部算经

一　李淳风生平

李淳风，岐州雍县（今陕西凤翔）人。父李播为隋高唐县尉。因不得志，弃官而为道士。文学造诣颇深，曾注《老子》、撰《方志图》，有《文集》10卷传世。淳风约生于603年。他自幼聪明好学，

博览群书，尤喜天文、数学及阴阳之学。贞观初年，在批评傅仁钧《戊寅历》时显露才华，被朝廷封为将仕郎，始在太史局任职。

李淳风发现当时所用天文仪器不精，遂上书唐太宗："今灵台候仪，是魏代遗范，观其制度，疏漏实多。……以测七曜，岂得其真？黄道浑仪之阙，至今千余载矣。"① 他请旨重修浑仪，获准。于是，他亲自设计并组织人力，于贞观七年(633 年)造成新的浑仪，以铜为之，表里三重，下据准基，状如十字，末树鳌足，以张四表。第一重名六合仪，由天经双规、浑纬规、金常规构成，展现二十八宿、十干、十二辰及经纬 365 度。第二重名三辰仪，圆径八尺，由璿玑规、黄道规、月游规构成，展现日、月及五星运行。第三重名四游仪，由玄枢、玉衡等构成，可在仪内仰观天之辰宿，下识器之晷度。时称精妙。又论前代浑仪得失，著《法象志》七卷以奏之，太宗称善，将其浑仪置于凝晖阁，加授承务郎。贞观十五年(641 年)，授官太常博士。不久改任太史丞，参预撰写国史《晋书》及《五代史》，其中"天文"、"律历"、"五行志"皆淳风所作，并参编了《文思博要》。这段时期，他深入研究各代历法，写出一部新历，于贞观十九年(645 年)进呈朝廷，唐太宗赐名"乙巳"(645 年为乙巳年)，遂称为《乙巳元历》。但因不够成熟，没有颁行。贞观二十二年(648 年)，李淳风晋升太史令，是为掌管天文、历法的最高长官。

贞观年间，国学大兴，明算科拟采用《九章算术》等 10 部算经为教材。太史监侯王思辩表称这些算书"理多舛驳"。于是，李淳风与国子监算学博士梁述、助教王真儒等奉召注释并校订了这 10 部算书。书成后，高宗令国学行用，时在永徽年间(650～655)。

① 李淳风认为："《周官》大司徒职，以土圭正日景，以定地中。此亦据混天仪日行黄道之明证也。暨于周末，此器乃亡。"故曰"至今千余载矣。"见《旧唐书》卷七十九李淳风传。

显庆元年(656 年)，李淳风以修国史功封昌乐县男。

龙朔二年(662 年)，李淳风由太史令改官秘阁郎中。因傅仁钧《戊寅历》渐疏，李淳风便在刘焯《皇极历》的基础上撰《甲子元历》，经检验后被朝廷采用，于麟德二年(665 年)颁行，谓之《麟德历》。

咸亨初年(670 年)，李淳风官职复旧，还为太史令。年六十九(约 672 年)卒。所撰《典章文物志》、《乙巳占》、《秘阁录》等亦传于世。

二　校订和注释数学教科书

10 部算经包括《九章算术》、《周髀算经》、《缀术》、《五曹算经》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张邱建算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》和《缉古算经》，大体反映了唐初以前的数学成果，但并非为教学而作。有的书中已有高水平注释，如《九章算术》，但某些注文属学术论文性质，不便教学。有的书缺少一般性方法，如《张邱建算经》；有的书解法过简，如《海岛算经》。至于《五经算术》，只是搜集儒家经典中有关数字的问题并加以讨论，而没有归纳为明显的数学题，也未给出算法。另外，由于此前无印刷术，这些书几经传抄，以讹传讹之处亦不少。李淳风等出于教学的目的，对它们进行了全面的校订和注释。王思辩说这些书“理多舛驳”，可见由于传抄之误，使不少地方文理不通。但从现传本来看，10 部算经中的错误并不多。可见李淳风等在纠正传抄之误方面做了许多细致而有效的工作。只是由于我们见不到唐以前的抄本，所以无法对此作出具体评价。这里主要讨论李淳风等人的注释工作。

总的来说，李淳风等对这 10 部算书的注释是恰到好处的。首先，注文的量比较合适。他们不仅对 10 部书的本文，而且对原有的注释进行了仔细考察，凡原注明确者一律保持而不加己注，如

《九章算术》"盈不足"章及"方程"章便没有他们的注释。对于注释不当或原书无注、不便初学者理解的必加注，使注文要而不烦。其次，注文质量较高，从现传本中有李淳风等注的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《张邱建算经》、《五经算术》来看[①]，李淳风的学风是比较严谨的，注文准确、简明，且算理、算法并重，适于教学。再者，注文有代表性。如《张邱建算经》中有若干题的球体积沿用《九章算术》旧术，不够准确。李淳风等便对其中的一题改用祖暅的公式，其他各题则不加注释，留待学生自己思考。

概括起来，李淳风等人的注释工作分为以下几个方面：

(一)解释数学名词

对原书中未加定义又无注释的数学名词，李淳风等多给予解释，以便学生理解。如《九章算术》"方田"章中，李淳风等便对合分、减分、课分、平分、经分、乘方等分数运算的有关名词作了详细解释。"少广"章开头则对卷名作了解释："一亩之田广一步，长二百四十步。今欲截取其从少，以益其广，故曰少广。"

(二)解释原术或给出一般性方法

毫无疑问，让学生掌握教科书中的算法是当时数学教育的主要目的。李淳风等为此下了很大功夫。原书中有的算法过简，不易理解；有的则只有具体演草，而无法则。因此，李淳风等对许多术文进行了解释或给出一般性方法，这对教学是大有补益的。

例如，《九章算术》"勾股"章第三题术为"股自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即勾。"李淳风等以直观的几何方法进行了解释："此术以勾、股幂合成弦幂。勾方于内，则勾短于股。令股

---

① 《缉古算经》中没有李淳风等注；《缀术》及《夏侯阳算经》已失传，不知有没有李淳风等注；现传本《孙子算经》和《五曹算经》都标明"李淳风等奉敕注释"，但不见其注。

自乘以减弦自乘，余者即勾幂也。故开方除之，即勾也。”再如“少广”章开立方术，李淳风等注释十分详细。现摘录如下(单引号内文字为原术)：“开立方者，立方适等，求其一面之数。‘借一算步之，超二等’者，立方求积，方再自乘。就积开之，故超二位，言千之面十，言百万之面百也。‘议所得，以再乘所借一算为法，而除之’者，求为方幂，以议命之而除，则立方等也。‘除已，三之为定法’者，为积未尽，当复更除。故豫张三面已定方幂为定法。‘复除，折而下’者，三面方幂皆已有自乘之数，须得折、议，定其厚薄。据开平方百之面十，其开立方即千之面十。而定法已有成方之幂，故复除之当以千为百，折下一等。……”注文中对各步的解释都很清楚。

《海岛算经》各题术文也比较简略。李淳风等出于教学目的，注释甚详。例如第1题：“今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何?”原术为：“以表高乘表间为实。相多为法，除之。所得加表高，即得岛高。”李淳风等注：“按此术意，……二去表相减为相多，以为法。前后表相去千步为表间，以表高乘之为实。以法除之，加表高，即是岛高积步，得一千二百五十五步。以里法三百步除之，得四里，余五十五步。是岛高之步数也。”

《张邱建算经》中的许多题“虽有设问而无成术可览”，李淳风等便给出各类问题的“术”即一般解法。例如，卷上1～3题为分数乘法，但只有具体算草而无法则，李淳风等指出：“分母乘全内子，令相乘为实。分母相乘为法。若两有分，母各乘其全内子，令相乘为实，分母相乘为法，实如法而得一。”对分数除法，亦给出一般法则。

(三)补充新法

原书中某些方法不够精密，李淳风等便根据教学需要，补充新法。

例如《九章算术》“方田”章第31题：“今有圆田，周三十步，径十步，问为田几何？答曰七十五步。”显然，原术是以周三径一为率，比较粗糙。李淳风等取圆周率为$\frac{22}{7}$，得径$9\frac{6}{11}$，田$71\frac{13}{22}$。因圆周率值取$\frac{22}{7}$较3精密，故李淳风称之为“密率”，与祖冲之的“密率”$\frac{355}{113}$不是一回事。他熟知祖冲之的“密率”，但在实用时不必如此精确，因为计算太繁，故未列入教科书。不过也因此留下混乱。

再如《张邱建算经》卷上第19题：“今有圆材径头二尺一寸，欲以为方，问各几何？”即已知圆径二尺一寸，求内接正方形边长。原术以方五斜七为率，即取$\sqrt{2}\doteq1.4$，答案为一尺五寸。李淳风等采用勾股定理，开方得$14\frac{21}{25}$寸，是比较准确的。第20题：“今有泥方一尺，欲为弹丸，令径一寸。问得几何？答曰一千七百七十七枚九分枚之七。”按原术，球体积为$\frac{9}{16}d^3$(d为直径)，误差较大。李淳风等取圆周率为$\frac{22}{7}$，得球体积$\frac{11}{21}d^3$，答案为$1\,909\frac{1}{11}$，比原结果准确多了。

(四)使数学问题规范化

十部算经中，大部分内容都是算题，有问、有答、有术。但《五经算术》例外，该书只是搜集了《尚书》、《诗经》、《周易》、《周官》、《礼记》、《论语》、《孝经》等书中有关数学的问题，并没有提炼为算题。正如李淳风所云：“《五经算术》一部之中多无设问及术，直据本条，略陈大数而已。”这种形式是不便教学的。于

是，李淳风选择其中需要计算的问题，改写成规范的含问、答、术的数学题形式，题中数字均与原书同。例如，书中有一段引自《礼记·王制》的"国及地法"的内容，言及各国占地及闲地面积，李淳风便据此改编为算题："其问宜云：今有州方千里，其中封百里之国三十，七十里之国六十，五十里之国百二十。问三等国别及当色总数并都合积里，余为闲田，得地几何？曰：百里之国，一国得积万里，总积三十万里。七十里之国，一国得积四千九百里，总积二十九万四千里。五十里之国，一国得积二千五百里，总积三十万里。都合得积八十九万四千里。闲田积十万六千里。术宜云：置方里，各自乘为一国之积里。各以本方国数乘之，得当方总数。并之即都合积里。以减一州方里自乘大数，余即闲田也。"

(五)纠正原书之误

对原书及前人注释中的错误，李淳风等也注意予以纠正，尤其表现在《周髀算经》中。例如，《周髀算经》作者认为南北相去一千里，日中表[1]影长度差一寸，李淳风等批评它不合实际。经赵爽修改的二十四气八尺高标杆的正午日影长，立术有误，从冬至到芒种及从夏至到大雪，每气影长均差九寸有余。李淳风等批评赵爽"立术虚诞"，正确指出："每气差降有别，不可均为一概"，并根据历书记载及等差级数理论，对日影长度进行了修正。甄鸾对赵爽"勾股圆方图"的解说不当，李淳风等也逐条予以校正。如甄鸾对赵爽"以勾股之差自相乘，为中黄实"(图4.3.1)的解说为"以勾弦差二，倍之为四，自乘得十六，为左图中黄实也。"李淳风等指出："鸾之倍勾弦差自乘者，苟求

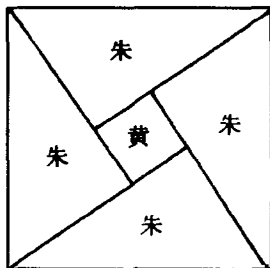


图 4.3.1 弦图

① 这里的"表"指用来测日影长度的八尺高的标杆。

异端。虽合其数，于率不通。”

（六）介绍有关的数学史知识

李淳风等人的注释，不限于数学知识本身，还介绍了一些有关的数学史知识，使学生了解某些重要成果的来源。例如，在对《九章算术》刘徽割圆术的注释中，便简述了圆周率从古代的周三径一而逐渐精密的历史过程，特别强调祖冲之的工作。在对开立圆术的注释中，又详细介绍了祖暅对球体积公式的贡献。

综上所述，李淳风等虽然没有独立编写出数学教材，但十部算书经其注释后，应该说比较适于教学了。这套书能在唐、宋两朝的学校里沿用数百年，与李淳风的工作是分不开的。

三　保存和发展传统数学理论

李淳风等校订十部算经的直接目的是教学，但其意义不止于此。他们的工作，使唐代之前的一些珍贵数学史料得以保存至今，并在纠正原书之误的过程中，发展了传统数学理论。

祖暅对球体积公式的推导过程及祖暅原理之所以能流传下来，完全是由于李淳风等在《九章算术》“少广”章开立圆术后引述了祖暅说，因为祖氏父子的《缀术》早已失传。若无李淳风等人的工作，这一具有世界意义的重要成果将湮没无闻，在中国数学史的研究中留下一块空白。

李淳风等对数学理论的发展主要表现在他们对《周髀算经》的注释。此书的李淳风等注堪称力作，其学术水平超过他们对其他各书的注释。

《周髀算经》中著名的日高公式是在大地为平面的假设下建立起来的。但《周髀算经》所描述的盖天说模型却是“天似盖笠，地法覆盘”，认为“北极之下高人所居六万里，滂沲四隤而下，天之中央亦高四旁六万里。”可见天与地都是拱形，且互相平行。这便出现了一个不能自圆其说的矛盾：既然大地是曲面，怎能用平面

上的日高公式来测算天体的位置呢？李淳风等批评道："然则天无别体，用日以为高下。术既随平而迁，高下从何而出？语术相违，是为大失。"

为了从理论上纠正《周髀算经》的"语术相违"，李淳风等提出了一系列新的数学思想和方法。

（一）将不同高度的重差问题转化为同一高度上的日高术

重差术是中国古代的重要测量方法。刘徽的《海岛算经》是重差术的经典著作，处理了各种不同高度的测量问题。其中亦有同一高度上的测量问题(第1题)，实质与日高术无异。李淳风等人的贡献在于把两者统一起来，把不同高度的重差问题转化为同一高度上的日高术，这在中国测量史上是一个创造。

盖天说认为大地"南低北高"，李淳风等突破了这一限制，认为地势与测量地点有关。他明确写道："若北表地高则以为勾，以间为弦。置其高数，其影乘之，其表除之，所得益股为定间。若北表下者，亦置所下，以法乘、除，所得以减股为定间。"[①] 这就是说，在南北方向立二表以测日高，根据地势不同(北高或南高)给出两种方法。

李淳风等处理这类不同高度上的重差问题的思路是，将其转化为平面大地上的日高术，再依《周髀算经》中的公式

$$日高(OH)=\frac{表高(AB)\times 表间(DB)}{影差(BF-DE)}+表高(AB)。$$

求解(图4.3.2)。

假设北表地高。如图4.3.3，O为太阳，AB为北表，CD为南表，其水平高度差BK称为勾。BF与DE分别为两表在各自水平面上的影长，两表在倾斜地面上的距离BD称为弦。直角三角形BDK中，DK为股。为测日高HO，须将表AB移至$A'B'$处(A'

① 《周髀算经》卷上。

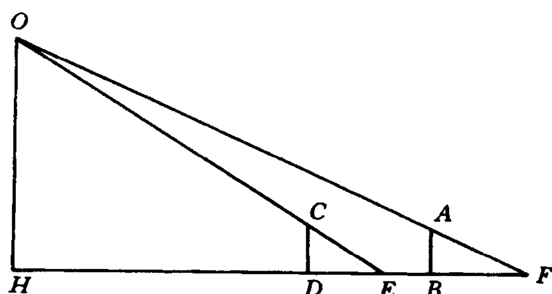


图 4.3.2　日高图

是过C且平行于水平面的直线与OA延长线之交点)。注文称DB'为"定间"，欲求DB'，需知KB'。因为

$$\square AI=\square GL,$$

所以

$$KB'=BI=\frac{\text{高度差 } BK\times\text{影长 } BF}{\text{表高 } AB}。$$

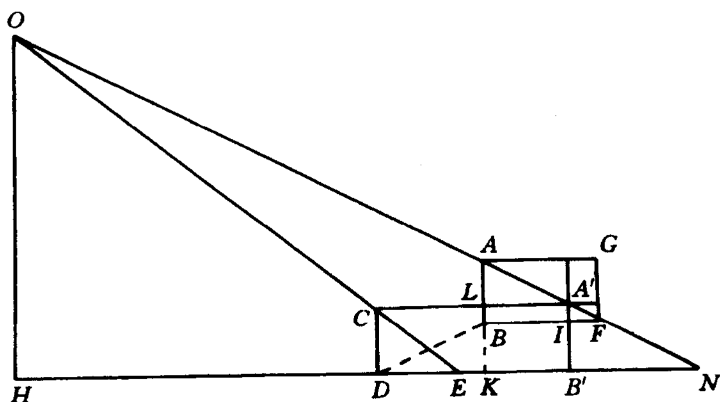


图 4.3.3　北表地高图

由勾股定理可得股 DK。所以

$$DB'=DK+KB'。$$

考虑到 $B'N=BF$，由日高术公式得

$$日高(OH)=\frac{表高(AB)\times 定间(DB')}{影差(BF-DE)}+表高(AB)。$$

对于南表地高的情况，李淳风等也是将其转化为平面大地上的日高术，从而导出类似公式的。

这些公式，显然适用于不同平面上立重表测量高、深、远的一般情况，所以说李淳风等发展了刘徽的重差术，其方法具有一定的理论价值和实用价值。不过，具体到测日问题，李淳风等仍依《周髀算经》，认为北极之下的地面最高。由于在中国地面观察，太阳正午总在南方，所以北表高于南表。

（二）对大地拱率及一般相似三角形的讨论

“北表地高”或“南表地高”两种情况，只涉及直角三角形问题。在此基础上，李淳风等系统研究了在各种地形上的测量问题，他说：“然地有高下，表望不同，后六术乃穷其实。”这六术分别为：后高前下术、后下术、邪下术、邪上术、平术、外衡术。其中第一、二两术已如前述。平术为平面大地上的日高术。

第三、四两术分别讨论锐角三角形及钝角三角形的相似问题。

“邪下术”云：“依其北高之率高其勾影，合与地势隆杀相似，余同平法。”如图 4.3.4，O 为南方天空被测目标，AB 为北表，CD 为南表，BF 与 DE 分别为它们在倾斜大地上的投影（李淳风等称 DE 为“勾影”），DG 为高率，即两表的水平高度差。将 BD 两向延长，得 PF。“合与大地隆杀相似”，即 PF 可表示倾斜大地。BH 为观测点 B 的水平面，P 为被测物正下方地点。因“余同平法”，故

$$OP=\frac{AB\times BD}{BF-DE}+AB。$$

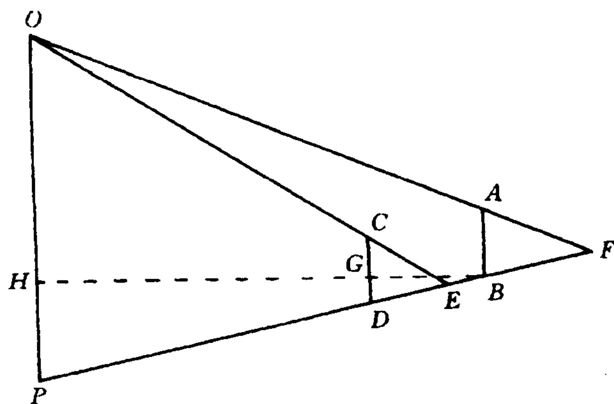


图 4.3.4 邪下图

注文又说："假令髀[①] 邪下而南，其邪亦同，不须别望，但弦短与勾股不得相应，其南里数亦随地势，不得校平，平则促。"这就是说，只要南、北二表所在地面的倾斜程度能代表大地的倾斜程度，即 DE，BF 与 PF 共线，便可直接代入上式。不过此时的三角形 FOP 为一锐角三角形，因为"弦(OF)短，与勾、股不得相应"。若令 PF 水平，则三角形 FOP 的边 FP 变短，这便是李淳风等所说："平则促"。

显然，李淳风等所谓"余同平法"，就是将勾股形上的结果直接推至锐角三角形。

"邪上术"讨论的是钝角三角形情况。如图 4.3.5，O 为北方天空被测目标，CD 为北表，AB 为南表，则$\triangle OFP$ 为钝角三角形。与邪下术类似，李淳风等也将勾股形上的结果推至此三角形，得到同样结果。

① 髀即测日影的表。

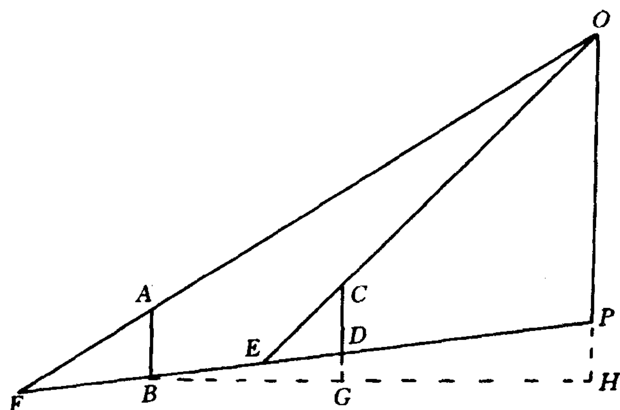


图 4.3.5 邪上图

综上所述，李淳风等将直角三角形的有关结论推广到任意三角形。这种做法，在现存中国古算书中是最早的。这说明李淳风已认识到任意三角形中相似图形的存在及对应边成比例的性质。虽然他没有留下推导过程，但十分明显，其结论靠传统的出入相补原理是推不出来的，必借助于相似三角形。根据李淳风等注文，其思路可能如下：

如图 4.3.6，连 AC 并延长 AC，交 OP 于 N。由 $\triangle ONC \backsim \triangle CDE$，得

$$\frac{ON}{NC}=\frac{CD}{DE}。\tag{1}$$

又 $\triangle ONA \backsim \triangle ABF$，有

$$\frac{ON}{NC+DB}=\frac{AB}{BF}。\tag{2}$$

由(1)得

$$NC=\frac{ON \cdot DE}{CD}。\tag{3}$$

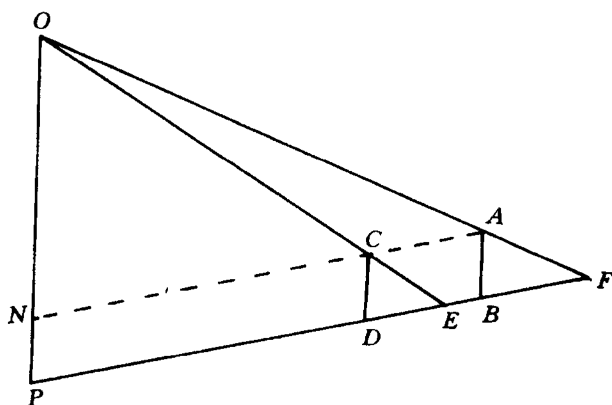


图 4.3.6 邪下术证明图

代入(2)，得

$$\frac{ON}{\dfrac{ON \cdot DE}{CD}+DB}=\frac{AB}{BF}。$$

化简，并考虑到 $AB=CD$，得

$$ON=\frac{AB \cdot DB}{BF-DE}。$$

所以
$$OP=\frac{AB \cdot DB}{BF-DE}+AB。$$

(三)求日径新术

《周髀算经》所载求日径方法如下：取一根口径一寸、长八尺的空心竹竿望日，当日面恰好充盈竿之另一端管孔时，有

$$\frac{\text{竹竿口径}}{\text{竿长}}=\frac{\text{日径}}{\text{斜至日}}。$$

已知测望者斜至日 10 万里，故

$$\frac{1\text{ 寸}}{8\text{ 尺}}=\frac{\text{日径}}{100\ 000\text{ 里}}。$$

所以

$$日径=\frac{1\times 100\ 000}{80}=1\ 250(里)。$$

斜至日 10 万里的数据显然是不准确的。另外，书中不言该里数是观测者至日心还是至日的边缘的距离，所以在数学上也不太合理。

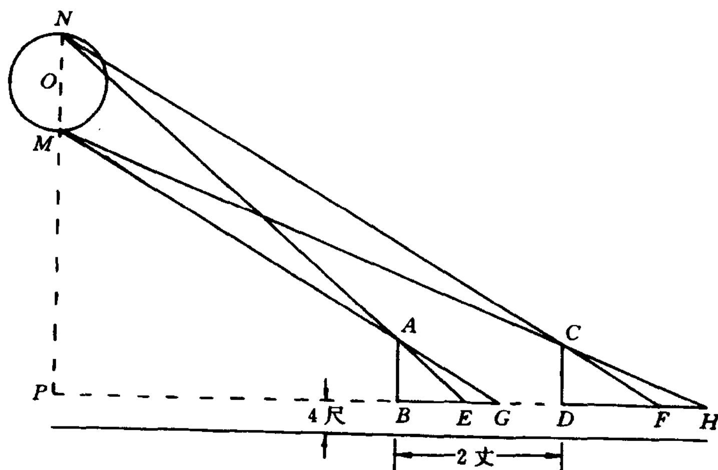


图 4.3.7　求日径

在《周髀算经》的注文中，李淳风等给出一种测日径新法："凡度日者，先须定二矩水平者，影南北，立勾齐高四尺，相去二丈。以二弦候牵于勾上，并率二则拟为候影。勾上立表，弦下望日。前一则上畔，后一则下畔。引则就影，令与表日参直。"大意为：要测日面直径，须在同一水平面上相距二丈的地方立两个高度同为四尺的平台。在两个平台上各立一表，相距二丈。观测者从台面经表端望日。如图 4.3.7，M，N 表示太阳直径的上、下二点，AB，CD 分别为二表，E，F 为 N 的投影点，G，H 为 M 的投影点。根据日高术公式便可求出 PN 和 PM，其差即日径 MN。

虽然由于太阳极其遥远，用这种简单的方法求得的太阳直径不可能准确。但在数学意义上，用这种方法测量天体或远方物体

大小是正确的，这是在日高术基础上建立的一种新的具有实用价值的方法。

第三节　《麟德历》和《乙巳元历》

一　《麟德历》

隋代刘焯的《皇极历》是当时最精密的历法，但由于把持司天监的张胄玄、袁充等人“共排焯历”，直到刘焯去世，未能颁行。半个多世纪后的唐高宗时代，因所用《戊寅历》渐疏，李淳风便采用《皇极历》中的天文及数学成果，在此前所撰《乙巳元历》的基础上写成《甲子元历》。《旧唐书》卷三十二云：“隋末刘焯造《皇极历》，其道不行。淳风约之为法，时称精密。”该历献给朝廷后，诏太史于麟德二年(665 年)颁行，谓之《麟德历》，与太史令瞿昙罗所上《经纬历》参行。《麟德历》行用六十余年(665～728)，《经纬历》则相形见绌，影响不大。

《麟德历》求出的“上元积年”为 269 880，就是说在 269 880 年前的 11 月 1 日(冬至)夜半，正好是太阳、月亮合朔，五大行星也正好与太阳、月亮同度。所以《麟德历》取此刻为它的理想起算点。传统的求上元积年的作法虽然实用价值不大，但却有数学意义，因为需要求解复杂的同余式组。李淳风得到如此庞大而准确的数据，足见他有相当高的数学水平。为了天文计算的方便，他还在求日、月及五星行度时，以 1 340 为公分母，称之为“总法”。此前的各家历法都是一种数据一个分母。李淳风对许多天文数据采用同一分母，大大简化了运算，在数学的应用方面无疑是一个进步。

《麟德历》的另一项重要成果是计算定朔。所谓朔，就是太阳、月亮黄经相同的时刻。相邻两次朔的时间间隔称朔望月，它是地

球绕太阳公转和月亮绕地球公转的会合周期。由于太阳及月亮的视运动均非匀速，所以朔望月的长度也是变化的。在历法史上，刘焯的《皇极历》首次提出根据日月运动的不均匀性来计算“定朔”的方法。此前各历书都用“平朔”，即认为太阳和月亮作匀速运动，取朔望月的长度为一个不变的平均值。

计算定朔对于准确预报交食及安排历日有重要意义。《皇极历》中提出的求定朔的基本方法是：先计算平朔时刻，再分别计算由于太阳和月亮运动不均匀而产生的改正值，与平朔时刻相加。即

定朔时刻＝平朔时刻＋太阳改正值＋月亮改正值。

定朔计算法能明显提高历法精度。但由于该历没有行用，此法在当时亦未能发挥应有作用。后来，傅仁钧曾主张采用定朔，未获成功。李淳风把定朔计算法用于《麟德历》，从而使该法复明于世。以后的各历家都采用定朔。李淳风的功绩是不可抹杀的。

在定朔计算中，刘焯创立了等间距二次内插法。载于《皇极历》的这一先进成果亦被《麟德历》采用。刘焯以时间为自变量，把一年分为 24 个相等的时间间隔，每个间隔被当作两节气间的时间长度，所以说他的内插法是等间距的。这是一种已经实测了太阳在某些节气的视行度数，求太阳在其他日期视行度数的方法。实质上是以太阳作匀加速运动为前提，将太阳视行度数看作时间的二次函数。设 h 为节气长，s 为某节气后日数，$f(t)$，$f(t+h)$，$f(t+2h)$为已知相邻三节气的太阳视行度数，$\Delta_1=f(t+h)-f(t)$，$\Delta_2=f(t+2h)-f(t+h)$，某一节气后 s 日的太阳视行度数为 $f(t+s)$，则刘焯的公式可表示为

$$f(t+s)=f(t)+\frac{s}{h}\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+\frac{s}{h}(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2h^2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

在《麟德历》中，李淳风熟练而灵活地运用了这一公式。例如“求朔望盈朒日辰入变迟速定数术”，设 $f(x)$ 为所求定数，则其

算法相当于

$$f(x)=s\cdot\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}+s(\Delta_1-\Delta_2)-\frac{s^2}{2}(\Delta_1-\Delta_2)。$$

这实际是刘焯公式中 $h=1$ 的情况。公式中应有一常数，因其为零，故在公式中未出现。李淳风认为“此法微密至当，以示算法通途。”

在“求月入交去日道远近术”（即求合朔时月亮的黄纬度数）的计算过程中，李淳风也使用了等间距二次内插法，这时的公式没有缺项，即 $f(t)\neq 0$。

唐代中日文化交流频繁，日本的“遣唐使”多次来华，其中的留学生们把包括《麟德历》在内的唐代历书及时带回日本。《麟德历》曾被日本官方采用，书中的等间距二次内插法是日本历法家及数学家所熟悉的。

在国内，《麟德历》对后世的历法及数学都有影响。虽然李淳风并非等间距二次内插法的发明者，但正因为他继承并广泛采用了刘焯的这一先进成果，才使它流传开来（傅仁钧《戊寅历》中亦用到此法，不如李淳风用得广泛）。在古代，人们把日、月视行度数看作时间的一次函数，采用一次内插法，据此编造的历法当然不准确。刘焯、李淳风等在日、月运动不均匀的认识基础上采用二次内插法是一个重大进步，张遂《大衍历》中的不等间距二次内插法，正是在此基础上提出的。李淳风和刘焯一样，计算中以各节气时间间隔相等为前提。而实际上，二十四节气的时间间隔应该有差别，使用不等间距内插法更合理。于是，张遂便按不等的时间间隔安排二十四节气，把刘焯和李淳风的公式由等间距推广到不等间距的情形，进一步提高了历法精度。

二 《乙巳元历》

《乙巳元历》是一部未颁行的不太成熟的历法，已经失传。但其中的部分内容保存于李淳风的《乙巳占》，从中可以窥其概貌。

李淳风在《乙巳占》卷一写道："余近造《乙巳元历》，术实为绝妙之极，……诸法皆同一母，以通众术。今列之，以推天度，日月五星行度皆用焉。"他假设日行一度，日法为1 340分，于是太阳一年行365 $\frac{328}{1\ 340}$度，每岁不周天13分，月亮每日行13 $\frac{494}{1\ 340}$度。由周天365 $\frac{341}{1\ 340}$度，得南极去北极182 $\frac{840\frac{1}{2}}{1\ 340}$度；赤道去二极91 $\frac{420\frac{1}{4}}{1\ 340}$度，黄道出入赤道24度。冬至日在赤道外24度，去极115 $\frac{420\frac{1}{4}}{1\ 340}$度；夏至日在赤道内24度，去北极67 $\frac{420\frac{1}{4}}{1\ 340}$度。这种采用相同分母的方法在历法上是一个创新，起到了简化运算及便于比较的作用，为《麟德历》所沿用。

《乙巳元历》中还包含用内插法来推算日、月位置的内容，但《乙巳占》没有引录，所以不明详情。

比较《乙巳元历》与《麟德历》，不难发现李淳风思想的发展变化。相对来说，《乙巳元历》中的数据是比较粗疏的，《麟德历》则准确得多。这说明李淳风在写《乙巳元历》时，仍处于探索阶段，而《麟德历》则在此基础上取得进一步的成果，达到比较成熟的程度。例如，在《乙巳元历》中，近点月为27日半强，交点月为27日强，而在《麟德历》中，近点月为27.554 5日，交点月为27.212 22日[①]。不过，《乙巳元历》中也有一些比较精密的天文数据，如周天度数为365 $\frac{341}{1\ 340}$即365.254 5度，恒星月为27.321 7日。

《乙巳元历》不仅对《麟德历》有影响，而且很可能影响到南

① 按近代方法测算，近点月约为27.554 6日，交点月约为27.212 23日。

宫说（*yuè*）等撰《景龙历》（撰于景龙年间，即 707～709）及张遂撰《大衍历》（行用于 729～761）。

《景龙历》中的周天度数为 365.257 1 度，与《乙巳元历》相近。在步算方法上，二者也有类似之处。另外，二历的上元也是一致的。

《大衍历》中计算太阳各节气天顶距的方法，则可能是在《乙巳元历》中天球弧度概念的启发下提出的。

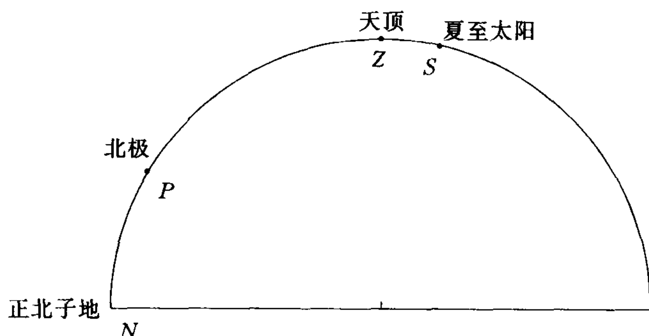


图 4.3.8　天球弧度示意图

根据《乙巳元历》有关术文可知（见图 4.3.8），北极去地（PN）36 度，天顶去四维（ZN）$91\frac{420\frac{1}{4}}{1\,340}$度，极去天顶度（$PZ$）$55\frac{420\frac{1}{4}}{1\,340}$度，夏至日在北极南（$SP$）$67\frac{420\frac{1}{4}}{1\,340}$度，在正北子地南（$SN$）$103\frac{420\frac{1}{4}}{1\,340}$度，日在天顶南（$SZ=SN-ZN$）12 度。在《乙巳元历》之前各历及《麟德历》中，都未给出如此清晰的天球弧度概念。

第五编

中唐历算

第一章 僧一行的《大衍历》

僧一行，俗名张遂，生于唐高宗弘道元年(683 年)，卒于唐开元十五年(727 年)，魏州昌乐(今河南省南乐县)人。

张遂出生于唐初功臣门第。“少聪敏，博览经史”，他常到藏书丰富的长安城南元都观去看书，颇受观主严崇赏识。一次他从严崇道士处借得扬雄《太玄经》，此书意旨深奥，严崇自称研读数年尚不能晓，张遂仅数日就读完，并能究其义而撰《大衍玄图》一卷。严崇大惊，对人说：“此后生颜子也。”张遂因此成为长安城里知名的青年学者。

时值武则天之侄武三思(？～707)当权，武慕张遂的才学，想与之结交。张遂为逃避武的纠缠，到崇山出家当了和尚，取名一行。一行不仅道学功底深厚，还刻苦钻研天文学和数学。他曾到天台山国清寺(在今浙江省天台县)投师学算，为他后来编制《大衍历》打下了坚实的基础。

开元五年(717 年)，一行被唐王朝强征回京。他不愿做官，于是被安置在长安城内的华严寺编译佛经。开元九年(721 年)，“太史频奏日食不效”。《麟德历》行用了半个多世纪，误差渐大，已需改革历法。于是，唐玄宗下诏命令一行负责主持制订新历。

从开元九年到开元十五年(721～727)，为了编制新历法，一行领导一批科学家，进行了大量的天象观测工作。为适应实测的需要，他们首先必须创制一些新的科学仪器，如他们创造了“复矩”、“黄道游仪”和“水运浑象”等。最后，在大量新的实测数据的基础上，一行编制出我国历史上最优秀的历法之一《大衍历》。

开元十五年(727 年)，《大衍历》草成。就在这年，一行在随驾去洛阳的途中死于新丰(今陕西省临潼县新丰镇)，年仅 45 岁。一行去世后，唐玄宗诏张说与历官陈玄景写定《大衍历》，分为“历术”(又称历经)7 篇、“略例” 1 篇、“历议” 10 篇。到第二年写成，于开元十七年(729 年)起正式颁行。

一行在科学方面的贡献主要在天文仪器制造，大地测量，编制《大衍历》三个方面。尤其是《大衍历》受到世人的称颂，如道士邢和璞称赞一行为“圣人”。他说：“汉之洛下闳造历云：‘后八百岁当差一日，必有圣人正之。’今年期毕矣，而一行造《大衍历》正其差谬，则洛下闳之言信矣，非圣人而何？”[①] 可见当时人们对一行的崇拜。

第一节　一行在仪器制造及天文观测方面的成就

一　天文仪器制造

天文学是一门实验性很强的自然科学，天文学的发展离不开天文观测的新成果。一行十分重视天文实测工作。他受命改制新历后，首先策划为配合改历所需的一系列实测工作。他首先奏请

① 《旧唐书》卷一百九十一“列传第一百四十一”。

朝廷:"今欲创历立元,须知黄道进退,请太史令测候星度。"[1] 但是,当时太史局所用测候星度的浑仪上没有黄道环,不能直接测出天体的入宿度(即黄道度)。[2] 一行提出要制造一架新的仪器。当时有率府兵曹参军梁令瓒用木料做了一件黄道游仪的模型。在一行的领导下,于开元十一年(723 年)把木模制成了铜器。一行、梁令瓒所制的黄道游仪的结构有三重环组。最外一重有三个环,包括地平、子午和卯酉环。其中卯酉环为过天顶和正东、西方向的一个圆环,这一重环组是固定不动的,起骨架作用。最里一重环组是夹有窥管的四游环,它的外圆周是一丈四尺六寸一分,即以四分弧长为角的一度。中间的一重和李淳风的三辰仪相当,所不同的是把赤道环上的每隔一度打了一个洞,使黄道环能模仿古人所理解的岁差现象,不断沿赤道退行。这是浑仪发展过程的一个创举,第一次在仪器上体现了岁差现象。同时,这也是黄道游仪的名称由来。由于黄道和白道的交点是在不断移动的,于是在黄道上每隔一度穿一个孔,过一定时间后,就把白道环移动一孔。

此外,为了能更方便地进行中天观测,黄道游仪中的四根支柱安放在四个斜角方向。

一行用黄道游仪做了许多工作,主要有月亮的运动和恒星的黄、赤道度数(即经度)及去极度(相当于纬度)的测定。其中月亮运动的观测对《大衍历》的制订有很大意义,为交食计算的准确性提供了基础。且在后者的观测中发现了恒星位置和南北朝以来的星图、浑象所标的位置相比有很多变化,因而《大衍历》中革除了沿用了数百年的陈旧数据,取而代之以新的观测数值。一行

---

① 《旧唐书》卷三十五"天文志上"。

② 李淳风已于贞观七年(633 年)制成一架浑天黄道仪,这架仪器有三重环组,中间一重环组由黄道环、赤道环和白道环组成,称为三辰仪。它已不仅能直接测得天体的入宿度,而且还可以区别黄道度与白道度。但是,李淳风制造的这架仪器被放在宫内,皇家天文机构所用的浑仪仍然是后魏制造的铁仪。

在恒星观测方面成绩卓著。[①]

一行在天文仪器制造方面的第二件创作，是他与梁令瓒及诸术士合作制造的一台名叫“水运浑天俯视图”的浑天象。它不但能表演天球和日月的运行，而且立了两个木人，按刻击鼓，按辰撞钟，集浑天象与自鸣钟于一体。《旧唐书》对此台仪器的结构有详细的记载，云：“铸铜为圆天之象，上具列宿赤道及周天度数。注水激轮，令其自转，一日一夜，天转一周。又别置二轮络在天外，缀以日月，全得运行。每天西转一匝，日东行一度，月行十三度十九分度之七，凡二十九转有余而日月会，三百六十五转而日行一匝。仍置木柜以为地平，令仪半在地平下，晦明朔望，迟速有准。又立二木人于地平之上，前置钟鼓以候辰刻，每一刻自然击鼓，每辰则自然撞钟。……当时共称其妙。”[②]

一行还创造了一种测量北极出地高度(即所测地的地理纬度)的专用新仪器——“复矩”(又叫“复矩图”)。关于复距的式样，史料没有详细记载。研究者猜想它可能如图 5.1.1 所示的形式。[③]

根据我们的考证，“矩”在我国古代天算典籍中有两种含义：一是形似木工曲尺的平面区域，即所谓的“积矩”；一是勾股形中的勾边加股边夹一直角构成的直角折线，即所谓的“矩线”。[④]“复矩”当理解为将积矩开口向下。《旧唐书·天文志》有“以复矩斜视，北极出地”多少度的记载，又说：“以图(即复矩图)较安南，日在天顶北二度四分。”这说明一行的复矩是一种用“角度”表示地平高度的测量工具。如图 5.1.1 所示，在复矩的直角顶点系以重锤，在两直角边间安装一个 0 到 91.31 度(因我国古代历法多取

① 席泽宗．一行观测恒星位置的工作．天文学报，1956，4(2)：212～217
② 《旧唐书》卷三十五“天文志上”。
③ 梁宗巨．僧一行发起的子午线实测．科学史集刊，1959(2)：144～149
④ 李继闵．商高定理辨证．自然科学史研究，1993，12(1)：29～41

圆周为365.25度，故直角当为91.31度)的量角器。使用时，把复矩的一个特定边指向北极，使此边恰好在人眼和北极的连线上，则重锤线即能在量角器上直接读出北极的地平高度。

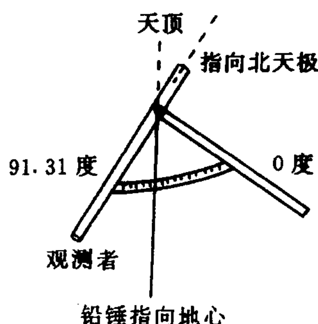


图 5.1.1 "复矩"结构示意图

总之，一行发明的复矩是一种简便的测量北极高度的仪器，它在一行领导的开元年间天文大地测量活动中，起到了非常重要的作用。

二 子午线测量

一行受诏改历后组织的另一项重大活动就是发起了一次大规模的天文大地测量工作。这次测量，不仅对历法改革起了十分重要的作用，更有意义的是，它用实测数据彻底地否定了历史上的"日影一寸，地差千里"的错误理论，相当于提供了较为精确的地球子午线一度弧的长度。

一行发起这次大规模的天文测量主要目的有二。其一，我国历史上有一种传统的理论："日影一寸，地差千里。"[①] 刘宋时期的天算家何承天根据当时在交州(今越南河内一带)的测量数据，开始对此理论提出了怀疑，但长期未能得到证实。隋朝天算家刘焯则提出了用实测结果来否定古人的这一错误说法的具体计划，他说："今交、爱之州，表北无影，计无万里，南过戴日。是千里一寸，非其实差。"他建议："请一水工，并解算术士，取河南北平

① 《周髀算经》、《尚书纬·考灵曜》等书里都有记载说，南北相距千里，夏至日中午，高八尺的竿子的影长就相差一寸。

地之所，可量数百里，南北使正。审时以漏，平地以绳，随气至分，同日度影。得其差率，里即可知。则天地无所匿其形，辰象无所逃其数，超前显圣，效象除疑。”①但这个建议在隋朝没有被采纳。一行的测量则实现了这一计划。其二，当时发现，观测地点不同，日食发生的时刻和所见食象都不同，各节气的日影长度和漏刻昼夜分也不相同。这种现象是过去的历法所没有考虑到的。这就需要到各地进行实地测量。

这次测量，由太史监南宫说及太史官大相元太等人分赴各地，“测候日影，回日奏闻”，而一行“则以南北日影较量，用勾股法算之。”②可见，一行不仅负责组织领导了这次测量工作，而且亲自承担了测量数据的分析计算工作。

当时测量的范围很广，北到北纬51度左右的铁勒回纥部(今蒙古人民共和国乌兰巴托西南)，南到约北纬18度的林邑(今越南的中部)等13处，超出了现在中国南北的陆地疆界。③这样的规模在世界科学史上都是空前的。

其中最值得注意的是由南宫说亲自率领的测量队，按刘焯的计划在黄河两岸平原地区测量的四个点，由北向南有滑州白马(今河南滑县)、汴州浚仪太岳台(今开封市西北)、许州扶沟(今河南扶沟县)、豫州上蔡武津馆(今河南上蔡县)。其中白马在黄河北，其它三点都在黄河以南。四点之间的距离是(唐里、唐步)：白马至浚仪198里179步，浚仪至扶沟167里281步，扶沟至上蔡160里110步，总计白马至上蔡526里270步。特别地，它们均介于东经114.2～114.5之间，差不多在同一经度上(即刘焯所说的“南北使正”)。南宫说等在这四点分别用八尺之表同时测出了冬夏二至和

① 《隋书》卷二十六“天文志”。

② 《通典》卷二十六“职官典之秘书监”。

③ 梁宗巨.僧一行发起的子午线实测.科学史集刊，1959(2)：144～149

春秋二分的日影长度，同时还测量了各点的北极高度，数据见下表。从中可以得出大约 351 里 80 步，北极高度相差一度的结论。这实际上给出了地球子午线一度的长度！

表 5.1.1　一行子午线测量的数据表

测量点	北极高度（唐度）	中午日影长度（唐尺）		
		冬至	夏至	春秋分
白马	35.3	13.00	1.57	5.56
浚仪	34.8	12.85	1.53	5.50
扶沟	34.3	12.53	1.44	5.37
上蔡	33.8	12.38	1.36	5.28

由于目前人们对唐尺数值大小的看法还不一致，故评价一行这次子午线测量的精度受到限制。初步的估计结果是，一行的测量值与现代值相比，相对误差大约为 11.8%。

国外最早的子午线实测是在公元 814 年。当时的阿拉伯国王阿尔·马蒙(786～833)命令天文学家阿尔·花刺子模(约 783～850,中世纪最重要的代数学家)参与组织,在幼发拉底河平原进行了一次大地测量,测算结果得出子午线一度长为 111.815 公里(现代理论值为 110.6 公里)，相当精确。但这已在一行之后 90 年了。

关于一行子午线测量是否是有意识地要测量地球的大小，学界的看法还不尽相同。但一行测量的结果实际上给出了一度子午线的长度，这是不争的事实。加之这次实测的其它成就，这项工作的意义因而受到了当今天文学史界及数学史界的高度赞扬。①

① 陕西天文台天文史整理研究小组．我国历史上第一次天文大地测量及其意义——关于张遂(僧一行)的子午线测量．天文学报，1976，17(2)：209～216

第二节 《大衍历》的九服晷影算法及其正切函数表

我国古代历法从后汉《四分历》开始，就有各节气初日晷影长度和太阳去极度的观测记录(影长随去极度变化)。漏刻、晷影成为古代历法的重要计算项目。隋朝刘焯发明二次等间距插值法之后，李淳风首先将二次插值法引入到漏刻计算中，由每气初日的漏刻、晷影长度数求该气各日的漏刻、晷影数。但是，各历法中所记载和计算的漏刻和晷影大多是阳城(今河南登封东南告成镇)的数值，当时又不可能在全国各地都安装仪器测量该地各节气初日的影长和去极度，进而求出该地的每日影长和去极度数。前面已经介绍过，一行在编制《大衍历》时，曾进行了大规模的天文测量，通过观测知道，随去极度变化的影长，又因地方而异，但同太阳的天顶距有固定的对应关系。一行在《大衍历》中发明了求任何地方每日影长和去极度的计算方法，叫做“九服晷影”。

古人把阳城作为测影的标准地点(即所谓的地中)。若设阳城夏至、小暑、大暑、……诸气太阳的去极度为 A_1，A_2，A_3，…，取 $\alpha_1=A_2-A_1$，$\alpha_2=A_3-A_2$，…，则 α_1，α_2 分别为阳城夏至到小暑、小暑到大暑的去极度差数，也是太阳天顶距的差数。且这个差数对任何地点的相应季节都是相等的。

如图 5.1.2 所示，若 NP 为阳城的北极高度，S_1，S_2，S_3，…分别为阳城夏至、小暑、大暑等日的太阳上中天位置，则

$$PS_1=A_1,\ PS_2=A_2,\ PS_3=A_3,\ \cdots$$

设有某地北极高度为 NP'，则夏至、小暑、大暑等日的太阳上中天位置为 S'_1，S'_2，S'_3，…。显然，有

$$\alpha_1=PS'_2-PS'_1,\ \alpha_2=PS'_3-PS'_2,\ \cdots$$

阳城夏至、小暑、大暑太阳天顶距为 ZS_1，ZS_2，ZS_3 等，故

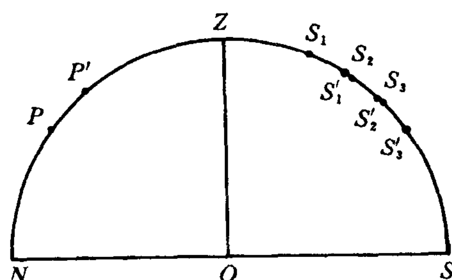


图 5.1.2　各节气太阳去极度图

$$\alpha_1 = ZS_2 - ZS_1,\ \alpha_2 = ZS_3 - ZS_2,$$

同样，有

$$\alpha_1 = ZS'_2 - ZS'_1,\ \alpha_2 = ZS'_3 - ZS'_2。$$

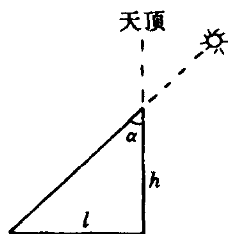


图 5. 1. 3　影长与天顶距的关系

历法中已给出阳城各气初日的太阳去极度，则各气的去极度差即为已知，同样各气的太阳天顶距差亦为已知，而这个差数对于任一地点都是相等的。这样一来，对于任一地方，只要知道某一节气(如夏至)的太阳天顶距，其它各气的太阳天顶距都可以通过加减这个差数求出。剩下还要解决以下两个问题：其一，如何求某地夏至(或冬至)的太阳天顶距；其二，已知天顶距如何换算出晷影长。这两个问题都可以通过建立一个影长与太阳天顶距的对应数表来解决。

如图 5.1.3 所示，有

$$l = h\tan\alpha, \tag{1}$$

其中，l 为影长，h 为表高，即有 $h=8$ 尺。如果列出一张以天顶距 α 为引数，每隔 1 度的 l 的数值表，则以上两个问题都可以解决：先在所测地测出(冬)夏至晷影长度(在一行领导的大地测量中，在

每处都进行了这样的测量)，由影长查表得出太阳天顶距，再依前述的加减一个差数的方法求出该地各气的天顶距，返回再查表得影长。一行在《大衍历》“步晷漏术”中就建立了这样一个从0度到80度的每度影长与太阳天顶距的对应数表。①

其术曰：“南方戴日之下，正中无晷。自戴日之北一度，乃初数千三百七十九。自此起差，每度增一，终于二十五度，计增二十六分。又每度增二，终于四十度；又每度增(六) [三]，终于四十四度，计增六十八。又每度增(二) [五]，终于五十度；又每度增七，终于五十五度；又每度增十九，终于六十度，增百六十。又每度增三十三，终于六十五度；又每度增三十六，终于七十度；又每度增三十九，终于七十二度，增二百六十。又度增四百四十；又度增千六十；又度增千八百六十；又度增二千八百四十；又度增四千；又度增五千三百四十。各为每度差。因累其差，以递加初数，满百为分，分十为寸，各为每度晷差。又累其晷差，得戴日之北每度晷数。”② 这段术文即相当于给出了下列表5.1.2。

在表5.1.2中，第一栏为戴日之北度数。我们知道，夏至日中午在北回归线上太阳正处在天顶处，影长为零，此为戴日之下。由此向北一度，太阳即偏南一度，故戴日之北度数即为太阳天顶距 α。表5.1.2的第二栏是晷影数，即八尺之表的影长 l。第三栏是每度晷数之差。第四栏每度晷数差的差。第五栏是差数的变化率，即增率。从图5.1.3可以看出，随着天顶距 α 的增大，这个增率也增大。在表5.1.2中，一行不断增大增率，并利用差分表的方式构造了此表。

① 刘金沂，赵澄秋. 唐代一行编成世界上最早的正切函数表. 自然科学史研究，1986，5(4)：298～309

② 《新唐书・历志四上》。引文中(　)内为原文，[　]内为刘金沂等的校勘文字。

表5.1.2 天顶距(α)和影长(l)对应表

戴日北/度数(α)	晷数(l)/尺	晷差/分	度差/分	增率/分	$\frac{晷数}{8}$
1	0.137 9	1 379	1	1	0.017 24
2	0.275 9	1 380	2	1	0.034 49
3	0.414 1	1 382	3	1	0.051 76
4	0.552 6	1 385	4	1	0.069 08
5	0.691 5	1 389	5	1	0.086 44
6	0.830 9	1 394	6	1	0.103 86
7	0.970 9	1 400	7	1	0.121 36
8	1.111 6	1 407	8	1	0.138 95
9	1.253 1	1 415	9	1	0.156 64
10	1.395 5	1 424	10	1	0.174 44
11	1.538 9	1 434	11	1	0.192 36
12	1.683 4	1 445	12	1	0.210 43
13	1.829 1	1 457	13	1	0.228 64
14	1.976 1	1 470	14	1	0.247 01
15	2.124 5	1 484	15	1	0.265 56
16	2.274 4	1 499	16	1	0.284 30
17	2.425 9	1 515	17	1	0.303 24
18	2.579 1	1 532	18	1	0.322 39
19	2.734 1	1 550	19	1	0.341 76
20	2.891 0	1 569	20	1	0.361 38
21	3.049 9	1 589	21	1	0.381 24
22	3.210 9	1 610	22	1	0.401 36
23	3.374 1	1 632	23	1	0.421 76
24	3.539 8	1 655	24	1	0.442 45
25	3.707 5	1 679	25	1	0.463 44

续表

戴日北/度数(α)	晷数(l)/尺	晷差/分	度差/分	增率/分	$\frac{晷数}{8}$
26	3.877 9	1 704	26	2	0.484 74
27	4.050 9	1 730	28 ·	2	0.506 36
28	4.226 7	1 758	30	2	0.528 34
29	4.405 5	1 788	32	2	0.556 9
30	4.587 5	1 820	34	2	0.573 44
31	4.772 9	1 854	36	2	0.596 61
32	4.961 9	1 890	38	2	0.620 24
33	5.154 7	1 928	40	2	0.644 34
34	5.351 5	1 968	42	2	0.668 94
35	5.552 5	2 010	44	2	0.694 06
36	5.757 9	2 054	46	2	0.719 74
37	5.967 9	2 100	48	2	0.745 99
38	6.182 7	2 148	50	2	0.772 84
39	6.402 5	2 198	52	2	0.805 31
40	6.627 5	2 250	54	2	0.828 44
41	6.857 9	2 304	56	3	0.857 24
42	7.093 9	2 360	59	3	0.886 74
43	7.335 8	2 419	62	3	0.916 98
44	7.583 9	2 481	65	3	0.947 99
45	7.838 5	2 546	68	5	0.979 81
46	8.099 9	2 614	73	5	1.012 49
47	8.368 6	2 687	78	5	1.046 08
48	8.645 1	2 765	83	5	1.080 64
49	8.929 9	2 848	88	5	1.116 24
50	9.223 5	2 936	93	5	1.152 94

续表

戴日北/度数(α)	晷数(l)/尺	晷差/分	度差/分	增率/分	晷数/8
51	9.526 4	3 029	98	7	1.190 80
52	9.839 1	3 127	105	7	1.229 89
53	10.162 3	3 232	112	7	1.270 29
54	10.496 7	3 344	119	7	1.312 09
55	10.843 0	3 463	126	7	1.355 38
56	11.201 9	3 589	133	19	1.400 24
57	11.574 1	3 722	152	19	1.446 76
58	11.961 5	3 874	171	19	1.495 19
59	12.366 0	4 045	190	19	1.545 75
60	12.789 5	4 235	209	19	1.598 69
61	13.233 9	4 444	228	33	1.654 24
62	13.701 1	4 672	261	33	1.712 64
63	14.194 4	4 933	294	33	1.774 30
64	14.717 1	5 227	327	33	1.839 64
65	15.272 5	5 554	360	33	1.909 06
66	15.863 9	5 914	393	36	1.982 99
67	16.494 6	6 307	429	36	2.061 83
68	17.168 3	6 736	465	36	2.146 03
69	17.888 3	7 201	501	36	2.236 04
70	18.658 5	7 702	537	36	2.332 31
71	19.482 4	8 239	573	39	2.435 30
72	20.363 6	8 812	612	39	2.545 45
73	21.306 0	9 424	651	440	2.663 25
74	22.313 5	10 075	1 091	1060	2.789 19
75	23.430 1	11 166	2 151	1860	2.928 76

续表

戴日北/度数(α)	晷数(l)/尺	晷差/分	度差/分	增率/分	$\frac{晷数}{8}$
76	24.761 8	13 317	4 011	2840	3.095 23
77	26.494 6	17 328	6 851	4000	3.311 83
78	28.912 5	24 179	10 851	5340	3.612 06
79	32.415 5	35 030	16 191		4.051 94
80	37.537 6	51 221			4.692 20

由(1)式知，第二栏实际上给出了 $8\tan\alpha$ 每隔 1 度的函数值。第六栏数值即取第二栏数的 1/8，相当于现代的 $\tan\alpha$ 之值。与现今的正切函数表对照后发现，47 度之前，一行数表的值稍大，其后稍小。60 度之前的平均绝对误差为 0.01，60 度以后的误差上升，其原因可能与原文有误，未能校正有关。

三角学最初起源于古希腊，在 11 世纪以前还没有角的函数概念，也没有提出三角形中角和边的关系。那时人们只是提出一些与三角学有关的问题，如圆内接正多边形的边长和半径的关系，弧的长度等。公元前 2 世纪喜帕恰斯(Hipparchus，约公元前 190～前 125)为了天文观测的需要，编制了一张“弦表”，列出不同圆心角所对的弦长。公元 2 世纪，托勒密(Ptolemaeus)在《天文学大成》中引述了这个表，以半径的 1/60 为单位，用 60 进位法每隔半度给出弦长。

公元 3 世纪，我国数学家刘徽提出割圆术，印度学者受到启发而改进了古希腊的弦表，以十进制计算半弦长，相当于现在的正弦线。如印度学者阿耶波多(Aryabhata，约 470～550)给出了 $3\,438\sin x$ 从 0～90 度每隔 3°45′度一个值的正弦表。大约在 920 年左右，一位阿拉伯学者阿尔·巴坦尼(Al-Battani，约 858～929)根据影长与太阳仰角之间的关系，编制了 0～90 度每隔 1 度的 12 尺

竿子的影长表，这实际上是一个 12cot α 的数表。另一位阿拉伯学者阿尔·威发(Abul-wafa，940～998)在 980 年左右编成了正切和余切函数表，每隔 15 度和 10 度给出一个值。他还首次引进了正割和余割函数。[①]

通过以上三角学早期历史的简单回顾，清楚地表明，正弦函数与正切函数起源于不同的测量问题，一行和阿尔·巴坦尼差不多沿着相同的途径编成正切和余切函数表。一行用太阳天顶距，阿尔·巴坦尼用太阳仰角，两者互为余角，所以他们两人的发现是相同的。而一行的正切函数表比阿尔·巴坦尼的余切函数表早近 200 年，比阿尔·威发的正切表要早 250 年。尽管一行的正切函数表只从 0 度到 80 度，误差也相应大一些，但它毕竟是世界上最早的正切函数表。

第三节　《大衍历》的插值算法

我们现在常用的牛顿插值公式，其不等间距的形式比等间距的形式要复杂得多。后者仅是前者的一个特例。目前天算史界有一种流行的看法，认为在我国古代，唐朝天文学家、数学家一行在其《大衍历》中发明了二次不等间距插值法，且一行还有意识地应用了三次差内插法近似公式。[②] 因此，一行在插值法方面的贡献倍受中外天算史研究者的关注。但是，最近有关中国古代插值法的算理研究的新成果表明，一行的插值法并没有人们所想象那样的推广意义。就插值算法本身，一行算法与刘焯算法实质完全

① 参见梁宗巨：世界数学史简编；M·克莱恩：古今数学思想(中译本第一册)；Smith D E. History of Mathematics. Vol. 2

② 严敦杰. 中国古代数理天文学的特点. 见：科技史文集(第 1 辑). 上海：上海科学技术出版社，1978. 1～4

相同；一行有意识地应用了三次差内插法近似公式的说法也是不可信的。①

刘焯二次等间距插值法的造术原理建立在源于《九章算术》描述匀变速运动的阶跃式模型基础之上，在刘焯的模型中，太阳运动为匀变速运动，所用数学方法，质言之就是构造一等差数列并求其前若干项和。

一 《九章算术》的匀变速运动模型与等差级数构造

对匀变速运动问题的描述，《九章算术》中有多例涉及，仅以“盈不足”章“良马驽马”问为例，可见其一斑。

“今有良马与驽马发长安至齐。齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增一十三里。驽马初日行九十六里，日减半里。良马先至齐，复还迎驽马。问几何日相逢及各行几何？”②

此问为初速度不为零的匀变速运动问题。按刘徽注大意，古人将良马各日行速看成一首项为 $a_1=193$，公差 $d=13$ 的等差数列；驽马各日行速为首项为 $a_1=96$，公差 $d=-1/2$ 的等差数列。第 n 日的速度为

$$a_n=a_1+(n-1)d。$$

则求前 15 日良马所行里数时，相当于给出了求等差数列前 15 项和的公式。刘徽注称：“求良马行者，十四乘益疾里数而半之，加良马初日之行里数，以乘十五日，得十五日之凡行。”

设 n 日良马凡行里数为 $f(n)$，即有

$$f(n)=\sum_{i=1}^{n}a_i=n\ [a_i+(n-1)d/2]\ =a_1n+n(n-1)d/2。$$

① 王荣彬．中国古代历法中的插值法构建原理．见：曲安京，纪志刚，王荣彬．中国古代数理天文学探析．西安：西北大学出版社，1994．251～317

② 本章所引的《九章算术》原文皆引自：李继闵．九章算术校证．西安：陕西科学技术出版社，1993

值得注意的是，古人把良、驽马行程看成是匀变速的，又把其一日内的行速看成是均匀的。所以，他们用“盈不足术”求在15与16日之间的“不盈不足”之数。这一点还可从刘注求良马第$15\frac{135}{191}$日行速的方法中看出：

“又以十五日乘益疾里数，加良马初日之行，以乘日分子，如日分母而一。”

就是以第16日的行速乘以135/191。

总之，这里的良马行速是关于日数的匀变速运动，但其日行速又是均匀的。这种匀变速运动的模型即现代所谓的阶梯函数。

关于等差级数的构造，上例“良马驽马”问中是已知首项及公差的情形。当首项与公差都未知时，下例“有竹九节”问构造等差级数的方法则直接是刘焯二次等间距插值法造术的原形。

“今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问中间二节欲均容各多少？

术曰：以下三节分四升为下率，以上四节分三升为上率。上、下率以少减多，余为实；置四节、三节，各半之，以减九节，余为法。实如法得一升，即衰相去也。下率一升、少半升者，下第二节容也。”

竹节上细下粗，“均容”，竹节粗细变化量为匀变量。其中

上率＝容量/上节数，　　下率＝容量/下节数，

分别为相应部分的“平率”，即平均数。刘徽注曰：“平率即为中分节之容也。”“中分节”，以各部分中点为中心对称的1节。也就是说，古人认为区间上匀变化量的均值等于区间中点处值。

因为上、下率的中心相距$9-(4+3)/2$(节)，而“上、下(率)以少减多者，余为中间五节半之凡差”，故有“衰相去”。

$$d=\frac{4/3-3/4}{5.5}=7/66。$$

d即为相邻两节所容的差数。又，下率为以下3节的中点为中心对

称之节所容，就是下第 2 节所容。则下第 1 节容

$$a_1=\frac{4}{3}+\frac{7}{66}=1\,\frac{29}{66}。$$

从下第 1 节数起的第 k 节容

$$a_k=a_1-(k-1)d.$$

二　《大衍历》的二次不等间距插值法

《大衍历》在求太阳行度算法中主张用“定气”，由此，把刘焯的二次等间距插值法发展成了所谓的二次不等间距插值法。现代牛顿型插值公式的不等间距情形是在引入差商概念下给出的，要比等间距情形复杂许多。大概正因为这个原因，一行的插值公式受到天算史界的高度重视。本节则将把刘焯《皇极历》与一行《大衍历》的有关术文对照分析，说明二者实质完全相同。

（一）《皇极历》推每日迟速术

“见求所在气陟降率，并后气率半之，以日限乘而泛总除，得气末率。”①

即

气末率＝［所求气陟降率(Δ_1)＋后气陟降率(Δ_2)］·日限/(2·泛总)

$=5(\Delta_1+\Delta_2)/h$，

其中，h＝10·泛总/日限＝14.54 日（或 15.45 日），为秋分到春分内（或春分到秋分内）平均每节气的长度。乘以 10 在筹算中相当于将算筹“进一等”，在《皇极历》的术文中，此三字都被省略了。

气末率就是所求气与后气陟降率的平均数，按前述中算家的均值概念，这个平均数当为以所求气的气末（也就是后气的气初）

① 刘焯．皇极历．见：中华书局编辑部．历代天文律历等志汇编（六）．北京：中华书局，1976．1931～1970．以下《皇极历》术文的出处皆同此。

为中心对称的一日之朓降率，即气末率乃以所求气之末为中心对称的一日内的朓降率。

“又日限乘二率相减之残，泛总除，为总差。其总差，亦日限乘而泛总除，为别差。率：前少者，以总差减末率为初率，(乃)[半] 别差加之；前多者，即以总差加气末率，[半别差减之]。皆为初日朓降数。”①

与《九章算术》的匀变速运动模型一样，刘焯视太阳运动为关于日数的匀变速运动，但其每日的速度又是均匀的。则每日朓降率数构成一等差数列。依均值概念，Δ_1/h 即为所求气每日朓降率的平均数，它是以该气中点为中心的一日内的朓降率数，姑且称之为“气中率”。同理，Δ_2/h 即后气“气中率”。既然朓降率呈等差数列，已知气中率，只要再求出公差即可。以上这段术文就是这个意思。

总差＝(所求气朓降率－后气朓降率)·日限/泛总

$=10(\Delta_1-\Delta_2)/h$，

别差(d)＝总差·日限/泛总$=10(\Delta_1-\Delta_2)/h^2$。

总差是相邻两气的气中率之差，别差即相邻两日的朓降率之差，所以《大衍历》分别直接称之为“气差”与“日差”。总差包含 h 个别差，因此得名，它对应于“有竹九节”问的“凡差”。别差则对应于“衰相去”。从而有

初日朓降率(δ_1)＝气末率－总差＋别差/2。

因为，气末率－总差＝气初率(δ_0)，气初率是以所求气之初为中心的一日之朓降率，所求气的第一日当为以气初之后半日处为中心的一日，故需再加“别差/2”。

“以别差前多者日减，前少者日加初数，得每日数。所历推定

① 引文中( )内文字为传本原文，笔者认为当删，[ ] 内文字即笔者的校补文字。下同。

气日，随算其数，陟加、降减其迟速，为各迟速数。”

设 δ_k 为所求气第 k 日陟降率，有

$$\delta_1=\delta_0+d/2,$$
$$\delta_2=\delta_1+d,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\delta_k=\delta_{k-1}+d=\delta_1+(k-1)d。$$

前 n 日陟降率之和为

$$p(n)=f(0)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i=f(x_0)+n\delta_1+n(n-1)d/2, \qquad (1)$$

其中，$f(0)$为所求气下的迟速数。

式(1)就是刘焯所创立的二次等间距插值法公式。

（二）《大衍历》求每日先后定数

“以所入气并后气盈缩分，倍六爻乘之，综两气辰数除之，为末率。”①

设所入气盈缩分为 Δ_1，后气盈缩分为 Δ_2，又设 h_1，h_2 分别为所入气及后气长度，则

末率＝(所入气盈缩分＋后气盈缩分)·12/两气辰数和

$$=(\Delta_1+\Delta_2)/(h_1+h_2)$$

显然，这里的“末率”也是所入气与后气盈缩分的平均数，则此末数的位置当置于$(h_1+h_2)/2$处，一行称之为末率，实为沿用刘焯的术语，且$(h_1+h_2)/2$处无以为名，又与气末贴近之故。

“又列二气盈缩分，皆以少减多，余为气差。至后以差加末率，分后以差减末率，为初率。倍气差，亦倍六爻乘之，复综两气辰数除，为日差。半之，以加减初(末)［率］，各为定率。”

“皆倍六爻乘之，各如辰数而一”，即分别除以两气的长度，有

① 一行．大衍历．见：中华书局编辑部．历代天文律历等志汇编(七)．北京：中华书局，1976．2217～2271。以下《大衍历》术文的出处皆同此。

气差＝所入气盈缩分/所入气长度－后气盈缩分/后气长度

$$=\Delta_1/h_1-\Delta_2/h_2,$$

这里 Δ_1/h_1 和 Δ_2/h_2 也分别是所入气和后气每日盈缩分的平均数，也就是所入气和后气的气中率。两个气中率之差名曰气差——相隔 1 气的两日盈缩分之差，它和刘焯的总差意义一致，二者异名同实。有趣的是，这两个名词各取其概念内涵的不同方面，互相补充，为我们考证原术的旨趣提供了有利的线索。

又因两气中率相距 $(h_1+h_2)/2$ 日，故有

日差 $(d)=2$ 气差 $/(h_1+h_2)$，

初率 (δ_0)＝末率＋气差，

此处初率与《皇极历》的气初率同名同实。原术中说"至后加，分后减"，是因为《大衍历》冬至和夏至以后各气盈缩分的绝对值前多后少，春分、秋分后，盈缩分绝对值前少后多，与《皇极历》的"前多"、"前少"取符号方法也相同。

定率 (δ_1)＝初率 (δ_0)＋日差 $(d)/2$，

此"定率"同彼处的"初日(陟降)数"。可见，《大衍历》以上术文也是在构造每日盈缩分这一数列的首项及公差。以下计算当是列出这一数列的各项并求其前若干项的和。

"以日差至后以减，分后以加气初定率，为每日盈缩分。乃驯积之，随入气日加减气下先后数，各其日定数。"

设每日盈缩分为 δ_k，即有

$$\delta_k=\delta_1+(k-1)d。$$

"驯积"亦作"循积"，逐日求和之意。设 n 为入气日，$f(m)$ 为所入气下先后数，则所入气第 n 日的先后数为

$$p(n)=f(m)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i=f(m)+n\delta_1+n(n-1)d/2。\qquad(2)$$

式(2)就是通常所指的一行二次不等间距内插法公式。

从以上的对照叙述中可以看出，一行插值公式与刘焯插值公

式是在同样的太阳运动模型之下,套用相同的思路推导出来的。二者的构造原理完全相同。

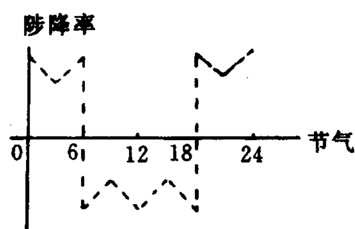


图 5.1.4　《皇极历》朓降率图

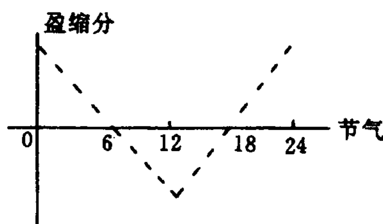


图 5.1.5　《大衍历》盈缩分图

值得一提的是，我们在前面曾指出，《大衍历》和《皇极历》的符号取法的叙述方法不同但实质相同，这是有重要背景的。刘焯在日躔表中规定太阳视运动一年内的变化规律是:冬至最快,冬至后渐慢，到立春时开始加快，春分时又达到最快，冬至到春分这段时间内日速比平均速度快。春分后太阳视运动的速度突变为最慢，之后逐渐加快，到立夏时又开始减慢，夏至达到最慢。春分到夏至时段内比平均速度慢。夏至以后的变化情况以夏至处为镜面对称，如图 5.1.4 所示。

《大衍历》盈缩分一年内的变化趋势则如图 5.1.5 所示。盈缩分在冬至附近最大，以后逐渐变小，夏至时最小，之后又逐渐增大。这相当于把冬至作为太阳视运动的近日点,夏至为远日点。这种认识是正确的，而《皇极历》的规定是不符合实际的。

最后，我们还需分析以下一行运用不等间距二次插值法的原因。《太初历》以后，各历都以平分一回归年 365.25 日为 24 等份而得每节气长 15.22 日，这样规定的二十四气称为“常气”，或“平气”。张子信指出“日行春分后则迟，秋分后则速”，于是刘焯造《皇极历》时体会到二十四气皆应有“定日”，他说:“春、秋分定日去冬至各八十八日有奇，去夏至各九十三日有奇。”但刘焯

并没有搞清楚太阳速度的加减和季节的关系，他的日躔表是把秋分定日后到春分定日前平均分为12段，每气14.54日；春分定日后到秋分定日前也平分为12段，每气15.45日。这显然不是“定气”。一行则认为，太阳在一回归年365.244 4日中共行365.244 4度，每气行15.218 5度。冬至附近日行速度最急，故二气间所需运行时间最短，夏至附近日行速度最缓，故二气间的时间最长。实际上，《大衍历》这里首先提出了平分黄道为24等份，以太阳实际走完每个等份的时间长度为各节气长度，这就是通常所称的“定气”概念。

一行提出正确的定气概念以后，在计算太阳改正时自然就以定气为插值间隔。至于插值法本身则完全是沿用刘焯的方法。

三　《大衍历》月亮极黄纬算法中的插值法

关于一行在插值法上的贡献，除目前多数天算史论著过高地评价了其二次不等间距插值法外，还有主张一行在月亮极黄纬算法及五星中心差改正算法中使用了所谓“三次差内插法的近似公式”。这些观点在天算史著作中被广泛征引，且已写入《中国大百科全书·天文卷》。下文将对以上两处插值法的实质作仔细地分析，导出的结论与这种流行的说法相左。

中国古代黄道坐标系中无黄极概念，其月亮距黄道南北的度数是沿赤经圈度量的，日本学者薮内清教授称此度数为极黄纬，以示与今日黄道坐标系的黄纬相区别。

最早列表计算月亮极黄纬始于刘洪的《乾象历》(206年)，其算法为先列表给出月亮极黄纬在一交点月内每日的数值，再用线性插值法求不足整日的余分上的数值。《皇极历》首先使用等间距二次插值法计算余分上的极黄纬值。

《大衍历》将一交点月分为少阴、少阳、老阴、老阳四象，每象限90度，每隔15度给出其“月去黄道度”(见表5.1.3)。表

5.1.3 中月去黄道度栏的 1 度=120 分，1.67 表示 1 度 67 分，其余类推。阴阳积是相邻两栏月去黄道度的差，加减率则是阴阳积的差。

表 5.1.3　大衍历月亮极黄纬

爻目	少阴少阳初	少阴少阳二	少阴少阳三	少阴少阳四	少阴少阳五	少阴少阳上	老阴老阳初	老阴老阳二	老阴老阳三	老阴老阳四	老阴老阳五	老阴老阳上
加减率	187	171	147	115	75	27	−27	−75	−115	−147	−171	−187
阴阳积	0	187	358	505	620	695	722	695	620	505	358	187
月去黄道度	0	1.67	2.18	4.25	5.20	5.95	6.02	5.95	5.20	4.25	2.18	1.67

若月亮在黄白交点后 s 度，其中

$$s=15t+n，t=1，2，3，\cdots，24，0<n<15。$$

则月去黄道度为

$$p(s)=p(t)+p(n)。\quad (3)$$

$p(t)$可直接从表 5.1.3 中查得，$p(n)$则依下术计算。

“以其爻加减率与后爻加减率相减，为前差；又以后爻率与次后爻率相减，为后差。二率相减，为中差。置所在爻并后爻加减率，半中差以加而半之，十五而一，为爻末率，因为后爻初率。每以本爻初、末率相减，为爻差。十五而一为度差。半之，以加减初率，为定率。每度以度差累加减之，各得每度加减定分。乃循积其分，满百二十为度。各为月去黄道数及分。”

设所在爻加减率为 Δ_{11}，后爻加减率为 Δ_{21}，次后爻为 Δ_{31}。则有

前差$=\Delta_{21}-\Delta_{11}=\Delta_{12}$，

后差$=\Delta_{31}-\Delta_{21}=\Delta_{22}$，

中差$=\Delta_{22}-\Delta_{12}=\Delta_{13}$，

本爻末率$=[(\Delta_{11}+\Delta_{21})+\Delta_{13}/2]/(2\cdot 15)$=次爻初率，

本爻初率(δ_0)＝ $[(\Delta_{01}+\Delta_{11})+\Delta_{03}/2]$ / $(2\cdot 15)$，

度差(d)＝(末率－初率)/15，

定初率(δ_1)＝初率(δ_0)＋度差/2，

每度加减定分$(\delta_k)=\delta_1+(k-1)d$。

循积之得本爻第n度的月去黄道度为

$$p(n)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=n\delta_1+n(n-1)d/2。\qquad (4)$$

从以上分析来看，《大衍历》月亮极黄纬算法中的插值法的构造思路，除引入中差而使初、末率的计算有所不同外，其他步骤与刘焯二次等间距插值法完全相同。而引入中差的效果只是在构造等差数列方法上有差别。总而言之，《大衍历》月亮极黄纬算法中的插值法与刘焯插值法实属一事①。

那么，《大衍历》在这里为何要引入中差呢？原来，刘焯日躔表中的各气陟降率之差是相等的，就有总差对各气都相等，用末率加减总差得初率。可以保证，这样得出的所求气的末率与后气的初率总是相等的。但是，《大衍历》月亮极黄纬表的“爻差”一般不等，有前差、后差之别(这种现象的出现，正是一行受命改历时作了大量天文观测的结果)，若仍按《皇极历》的做法，势必会出现所求爻末率与次爻初率不等，同一点出现了两个不同的值，迫使一行必须对初、末率计算方法进行调整。这大概就是引入中差的原因所在。

四　《大衍历》五星运动算法中的插值法

《大衍历》的五星计算方法在中国古代历法史上具有重要意义。如它首先创立五星近日点黄经进动值的测算法；最先引入五

---

① 王荣彬. 关于一行《大衍历》的插值法. 陕西天文台台刊，1996，19(1)：117～123

星中心差数表以及相应的插值算法，使中国古历五星运动不均匀性的改正算法，从形式到内容都发生了重大改革。我们以木星爻象历为例，说明《大衍历》五星中心差改正算法中插值法的实质。

表 5.1.4　大衍历木星爻象历

爻目	少阴少阳初	少阴少阳二	少阴少阳三	少阴少阳四	少阴少阳五	少阴少阳上	老阴老阳初	老阴老阳二	老阴老阳三	老阴老阳四	老阴老阳五	老阴老阳上
损益率	773	721	630	500	331	123	−123	−331	−500	−630	−721	−773
进退积	0	773	1494	2124	2624	2955	3078	2955	2624	2124	1494	773

表 5.1.4 中损益率是进退积的差，进退积的分母是 760（辰法）。五星爻象历的起点就是五星的近日点，故计算五星中心差改正需先求出平合点在爻象历中的位置。设所求年冬至木星平合点近点角为：

$$\theta=t(\text{爻象})+n(\text{度})+m(\text{分}),$$

其中，t 为 θ 入爻象历的爻目数，木星 1 爻象=15.22 度，n 为所入爻象内的度数，$0<n<15$，m 为度余，$0<m/760<1$。$f(\theta)$为合点平近点角的中心差改正，取

$$f(\theta)=p_1(t)+p_2(n)+p_3(m),$$

则 $p_1(t)$可直接在表 5.1.4 的进退积栏查得，而 $p_2(n)$和 $p_3(m)$分别要用插值法计算。

$p_2(n)$的算法与前节月亮极黄纬算法中的插值法相同，不再赘述。$p_3(m)$的计算方法如下。术曰：

“各置其星平合所入爻之算差，半之，以减其所入算损益率。损者，以入余乘差，辰法除，减差而半之；益者，半入余乘差，亦辰法除。皆加所减之率。乃以入余乘之，辰法而一，所得以损益其算下进退，各为平合所入定数。”

“所入算”亦即所入爻度数(n)，每度的损益率已由前 $p_2(n)$算

法求出。该术给出当所入算为“损者”（“益者”略）时，度余部分的改正为

$p_3(m)$＝{[(所入算损益率－算差/2)入余/辰法－算差]/2＋所入算损益率} 入余/辰法
＝所入算损益率·入余/辰法－(算差·入余/2)/辰法＋(所入算损益率－算差/2)·入余·入余/（2辰法·辰法），（5）

其中，“所入算损益率·入余/辰法”表示以该度中点为中心的1分上的损益率的入余倍；“(算差·入余/2）/辰法”表示相隔半度的两入余段损益率之差；“(所入算损益率－算差/2）·入余·入余/2辰法·辰法”表示该度初入余段损益率的半入余倍。式(5)的意义可见下图5.1.5。可见，此度余段中心差改正算法的插值法与刘焯月亮改正中的插值法又是完全相同。

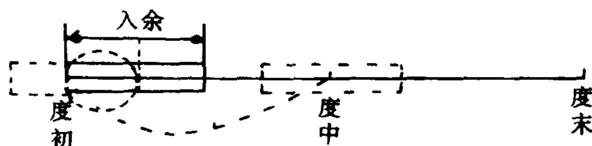


图5.1.5 《大衍历》木星度余段中心差改正示意图

综上所述，《大衍历》对插值法的应用的确丰富多采，但在算法上并无创新。作为一代名历，《大衍历》在天文算法上有许多重要的改进与创造，如本文所提到的对太阳周年视运动变化规律的正确把握，定气概念的引入等等。在笔者看来，这些正确认识并不比一行对插值法的所谓“创新”逊色。以往那种把二次不等间距插值法当作《大衍历》在算法上最重要贡献的说法，恐怕值得商榷。

第二章　《韩延算术》与《符天历》

第一节　《韩延算术》

唐宋时期是我国封建社会经济文化高度发达的阶段。唐初开始在国子监设立算学科，数学教育空前发达。据《旧唐书·经籍志》、《新唐书·艺文志》、《宋史·艺文志》等记载，唐宋先民著述了不少数学著作，但从唐显庆元年(656 年)李淳风等注释十部算经到南宋秦九韶著成《数书九章》(1247 年)，其间 590 余年中的唐宋数学著作都没有传本。传本《夏侯阳算经》(即《韩延算术》)因夹在宋刻《算经十书》中才得以流传下来，无疑是数学史研究中的一个重要文献。

从《韩延算术》的内容来看，它基本上可以说是一部为政府税收官员及会计人员等写的实用计算技术著作。作者在序言中说："余以总角，志好其文，略寻古今，备览差互。其如明数造术，讵晓端倪，寻考遗言，颇知梗概。且计课租庸调，无术可凭。步数奇残，若为销尽。永变米谷，经旨未赡。正耗共升，何由剖析。……"申明他是在搜集了各家算法，结合当代实际的基础上写出这部著作的。虽然该书在数学理论上没有什么建树，但它对了解唐代初期以来实用计算技术的发展，古代面积体积度量的意义等都很有帮助，它还保存了一些十分珍贵的唐朝中叶的税收及物价等史料，值得珍视。

一　《韩延算术》的内容

传本《夏侯阳算经》分上、中、下三卷。[①] 上卷包括“明乘除法”、“辩度量衡”、“言斛法不同”、“课租庸调”、“论步数不等”、“变米谷”等章节。

“明乘除法”叙述作乘法及除法的筹式布列方法和运算步骤(详见本卷第二编第四章第二节)。

“辩度量衡”一节讲述古代度量单位的意义。《韩延算术》的度量单位分“田曹”、“仓曹”和“金曹”三部分，分别对应于《孙子算经》的“度之所起”、“量之所起”和“称之所起”，说明长度、面积、体积、容量和重量等单位的进制。我国古代长度度量单位的标准多以黄锺、黍之长为基准，《韩延算术》此节也援引了《汉书·律历志》的有关论述。但同时又指出当时实用的度量工具的标准器皿由政府给定。特别值得注意的是，这里的长度单位是和地积单位一起放在“田曹”中给出：“六尺为一步，二百四十步为一亩，三百步为一里。”长度单位和面积单位交叉(《孙子算经》也是如此)。实际上，中国古代面积、体积的度量都用长度单位来表示。以往人们以为表示面积的丈、尺是平方丈、平方尺的省略，表示体积的丈、尺是立方丈、立方尺的省略，这是一种误解。这个问题留待下文分析。

“课租庸调”叙述租、调、庸的计算方法。《韩延算术》中记载有赋役令：“诸户一丁租粟二斛。其调，各随乡土所出，绢、絁各二丈，布二丈五尺。输绢、絁者棉三两，输布者麻三斤。”唐初的税令是：“凡授田者，丁岁输粟二斛，稻三斛，谓之租。丁随乡所出，岁输绢二匹，绫、絁二丈，布加五之一，棉三两，麻三斤，

---

① 本节讨论传本《夏侯阳算经》以钱宝琮校点《算经十书》本为蓝本，以下引文不再一一注明版本。

非蚕乡则输银十四两，谓之调。用人之力，岁二十日，闰加二日，不役者日为绢三尺，谓之庸。”[①] 二者基本相同。其中一些具体的计算实例，可能反映了当时实际的税收执行情况。如“求庸七丈五尺法”、“求有闰年每丁布二端二丈二尺五寸法”、“求庸闰布每丁一端三丈二尺五寸法”、“求每丁调绿布四丈法”等等。这些数据都是其他史料中所罕见的，甚足珍贵。当然，租庸调制度并非从唐朝才开始，租、调制从北魏初或更早就已实行了。隋开皇二年(582 年)颁布均田和租调新令，开皇三年(583 年)又下令：“年每岁服役期限由一月减为二十天，调绢由一匹改为二丈，并规定不服役者收庸。”[②]租庸调制已经完备，且数量与唐制基本一致，这是传本《夏侯阳算经》断代中值得注意的问题。

“论步数不等”一节讨论了方田、直田、腰鼓田、圆田、环田、丸田、圭田、弓田、萁田、四不等田等的面积算法，这些都不超出其前算经的范围。

“变米谷”节首先记录了当时的仓库令：“其折糙米者，稻三斛折纳糙米一斛四斗。粟五斗为粝米三斗”。另有两问分别进行米谷相互化算，其算法原理同《九章算术》的粟米法，但在作乘除法时，《韩延算术》都采用了速算方法。

“言斛法不同”节的内容将在下文作仔细分析。

中卷包括“求地税”、“分禄料”、“计给粮”、“定脚价”、“称轻重”等章节。

“求地税”给出了不同等级土地的纳税数量及计算方法。唐朝初期实行“租庸调”税制，到代宗时由于土地兼并改变了土地占有状况，与大量的自耕农、半自耕农存在相适应的租庸调制不再适用，代宗大历年间，已经逐渐改变为以户税、地税为主，成为

① 《新唐书》卷五十一“食货志一”。

② 《北史》卷十一“隋本纪”。

两税制的开端。两税制依户等纳钱，依田亩收米粟。这种以财产的多少为征税标准，扩大了赋税的承担面，在一定程度上改变了赋役集中在贫苦农民头上的情况。《韩延算术》记载有："今有田……亩出税谷三升纳官"，"今有上官田……亩别计米六斗输官"，"今有次官田……亩别计米五斗输官"，"今有下官田……亩别计米四斗输官"。其中上官田税米折合成谷后是普通田税谷的42.8倍。这是反映两税制具体情况的极为重要的史料。

"分禄料"是按官职大小分配财物，计算各自所得多少的配分算法，类似于《九章算术》的衰分法。"计给粮"是计算士兵口粮、马料等的方法。"定脚价"为从税收物品中抽取运费的计算方法，例题中就有两税米、两税钱等问题。两税制从代宗(762～779)时开始，到德宗建中元年(780年)，宰相杨炎正式制订颁布。钱宝琮先生因此判断此书为代宗时代的著作。"称轻重"则是计算物品重量的若干倍或物品重量的若干分之一等的问题。算题中体现了这样一个问题，当物品的重量单位斤、两、铢混用时，计算过程中都先化为最小单位，最后再逐次按进位制化回。如卷中第24题的解答是："置丁数。又以丝一斤，二而八之，为一十六两，内一十三两。三而八之，内一十七铢，为七百一十三铢。以丁数乘，得一百三十二万九千七百四十五铢。以二十四铢为法，除得五万五千四百六两一铢。以一十六两为法，除得三千四百六十二斤一十四两一铢。"卷中共收录有29个例题，其中有不少很有价值的史料。

下卷只有"说诸分"一节，共有44道例题。卷上、卷中的多数算法在其中都有重复，似有总复习题的特色。

在《韩延算术》的大量例题中，可以找到当时的物价、社会生产情况等珍贵资料。如卷中第20题中说："其绢匹价三贯八百七十文，其布端价二贯六百文。"卷下第35题说："米每斗一百三十五文。"卷下第6题说："九两丝可为绢一匹。"卷下第31题说：

“糯米每斗可酿酒一斗四升”。冶铁则分生铁、黄铁和钢铁三种。生铁炼成黄铁，每斤耗五两、黄铁炼钢铁，每斤耗三两。等等。

二　面积体积度量单位的意义

前面我们已经提到，我国古代面积体积的单位都用长度单位来表示，以往人们以为是省称，最近有新的研究证明这是一种误解。[①] 实际上，古人用长度单位表示面积体积，是因为他们实际度量的就是长度，就好像我们今天说几尺布一样，我们甚至还用多少毫米汞柱测量气压等。当然，量布之所以可以只说长短，是因为认定了每匹布的幅宽是确定的。同样，古人之所以对一般的面积及体积只说长短，是因为他们总是约定了一个确定的宽和底面。一般地，他们约定当以长度名称表示面积体积时，则必以所提到的最大单位为其宽或底面边长。例如，当说“积(面积)一百六十二寸”时，相应的宽为一寸；当说“积(面积)一尺六寸二分”时，相应的宽为一尺，两者所表示的面积是一样的。同理，当说到“积(体积)一千六百二十寸”或“一尺六寸二分”时，相应的底面为寸(边长 1 寸的正方形)或尺(边长 1 尺的正方形)，所表示的体积量也是一样的。如果将一百六十二寸和一尺六寸二分，分别理解为一百六十二平方寸和一平方尺六平方寸二平方分，则二者所表示的面积就不同了。《韩延算术》中的有关叙述可以帮助说明以上的理解是正确的。

“辩度量衡”节中有：“六尺为一步，二百四十步为一亩，三百步为一里。”其中，“六尺为一步，三百步为一里”都表示长度是公认的，而“二百四十步为一亩”则通常被解释为：“二百四十平方步为一亩。”但我们认为，这里的“二百四十步”也是表示长

① 王荣彬，李继闵．中国古代面积体积度量制度考．汉学研究，1995，13(2)：159～167

度。其实，只有这样理解，这个"六步为……，二百四十步为……，三百步为……"排比句才能解释得通。

这"二百四十步"在古代被叫做"亩法"。亩作为古代地积专用名称，它总被约定为宽1步，长240步。《韩延算术》"论步数不等"中引唐朝田令："诸田广一步，长二百四十步为亩。亩百为顷。"即是佐证。

"言斛法不同"一节更能证明以上观点。其文曰："仓曹云：古者凿地方一尺，深一尺六寸二分，受粟一斛。至汉王莽改铸铜斛，用积一尺六寸二分。至宋元嘉二年徐受重铸，用二尺三寸九分，……然时异事变，斗尺不同。以古就今，临时校定，始可行用。若欲审之，以掘地作穴方广一尺[1] 已下，以今时用斗量米一斛，置诸穴中，概令平满。如有少剩，临时增减，取米适平。然后出之径量，以知深浅，乃可以为斛法定数。"斛法即把容积一斛化成体积数，斛法的数值就是该体积当约定底面为边长一尺的正方形时的高度。

由于斗、斛等容器的大小随着年代的变迁而不断变化，其体积数也相应变化。《韩延算术》所介绍的这种校订斛法的方法既简单又反映了当时体积数值的实际意义。在地上挖一底面边长为1尺的直棱柱形坑，时用斛一斛米所占的高度即为所求的体积数。其后，用《韩延算术》这种类似方法校正斛法的不乏其例，如《数学通轨》、《直指算法纂要》等。

"言斛法不同"节第5题的术文也体现了这种用长度表示体积的思想方法。题设在一仓库中有"牵"二枚，各长二丈六尺，方五寸，欲计算其体积。术曰："牵方自相乘，退位，得二寸五分。复乘其长，得六尺五寸。"有趣的是，边长五寸的正方形，其面积为二十五(平方)寸。但由于本题最终答案的最大单位是尺，故这

---

① "方广一尺"各本皆讹作"方广三尺"，今校正。

里先将面积二十五寸化为二寸五分。显然，牵的底面边长自相乘所"得二寸五分"当是底面的面积。但这"二寸五分"决非"二平方寸五平方分"或"2.5 平方寸"，它指的是一长为 1 尺，宽为 2 寸 5 分的长方形的面积。其最后结果"六尺五寸"，也不可能是"六立方尺五立方分"。只须作简单的核算即可说明问题。

用长度来表示面积和体积这种思想方法，是我国古代几何学的又一鲜明的特色。

三　《韩延算术》中十进小数的雏形

古代测量长度工具的最小刻度一般为分，分以下的量大凡都是算家计算的结果。所以，分以下的长度单位首先是由算家引入而逐渐进入度量衡体系的。[①]《韩延算术》的田曹云："度之所起，起于忽。十忽为一丝，十丝为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸。"分以下的单位皆为十进，这种在实际度量单位以下的计算结果所表示的就是十进小数。但当时还没有发明十进小数的记法，因此都给它们赋予了不同的名称。

古代钱币以制钱一文为最小单位，遇到计算所得的结果有奇零时，也借用分、厘、毫、丝、忽等长度单位的名目来表示文以下的十进小数。例如《韩延算术》卷下第 29 题："今有绢四十二匹，每匹当钱四贯三百六十六文四分七厘八毫九丝四忽，问钱几何？"

特别值得一提的是，《韩延算术》还推广了这种十进小数的应用。如卷中第 18 题，术文中第一步计算就是把布 13 795 端 3 丈 7 尺（1 端＝5 丈）化成 13 795 端 74，端以下的两位小数不再另立单位名目。再如，卷下第 11 题，术文开始将绢 1 525 匹 3 丈 7 尺 5 寸（1 匹＝4 丈）化为 1 525 匹 9 375，也不再为匹以下的四位小数

---

① 吴承洛. 中国度量衡史. 上海书店，1984. 91

另立单位名目。它们和现代的十进小数记法已十分接近。这样的例子还有很多，不再一一列举。

我国古代数学史上，早在《九章算术》及其刘徽注中就出现了与十进小数实质相似的十进分数。唐代历法中也有丰富的十进小数和百进小数的知识。[①] 总之，十进小数在我国古代有着悠久的发展历史。

第二节　曹士蔿及其《符天历》

一　曹士蔿和《符天历》

《新五代史·司天考一》记载："初，唐建中时，术者曹士蔿始变古法，以显庆五年为上元，雨水为岁首，号《符天历》。然世谓之小历，只行于民间。而重绩乃用以为法，遂施于朝廷，赐号《调元历》。"《新唐书·艺文志》卷三著录有曹士蔿《七曜符天历》一卷和《七曜符天人元历》三卷。通常由朝廷颁布的历法称为"大历"，而只在民间实行的历法称为"小历"。在中国古代，天文历法一般被作为皇权的象征而禁止民间进行研究。唐朝中期安史之乱以后，军阀割据，国内混乱，朝廷政令难以施行，民间私历之类才得以流行。从以上正史的记载来看，《符天历》是由曹士蔿编撰的民间私历，撰著年代在建中年间(780～783)。《符天历》的算法被后晋的官历《调元历》(936年)所继承，影响过古代官历。它在唐末经五代直到宋朝，似乎曾广泛流行过，仅从《宋史·艺文志》的有关书目即可见一斑。《宋史·艺文志》卷五天文类著录有：《曹士蔿符天经疏》一卷，《符天通真立成法》二卷，《符天九

---

① 钱宝琮．唐代历家奇零分数记法之演进．见：钱宝琮科学史论文选集．北京：科学出版社，1983．261～270

星算术》一卷，《符天五德定分历》三卷，郭颖夫《符天大术休咎诀》一卷，张渭《符天灾福新术》五卷。历算类著录有曹士蔿《七曜符天历》二卷、《七曜符天人元历》三卷，杨伟《符天历》一卷，李忠议《重注曹士蔿小历》一卷，章浦《符天九曜通元立成法》等等。但由于《符天历》是为小历，正史不传。现在，关于《符天历》及其作者曹士蔿只能找到少得可怜的一点片断记载了。

现在人们知道的有关曹士蔿的史料还有以下几条:《新唐书·艺文志》卷三之五行类还记录有曹士蔿的《金匮经》三卷，大概是与占卜有关的著作，但现已失传。上述记载说明曹士蔿可能既是一位天算家又是一位善于占卜的术士。南宋陈振孙《直斋书录解题》卷十二著录有《罗计二隐曜立成历》一卷，对该书的解题为:“称大中大夫曹士蔿，亦莫知何人，但云起元和元年入历。”这一注解虽称曹士蔿为大夫,但看来陈振孙对这个人物一无所知。所谓“罗计”是指罗喉和计都的简称，印度天文学认为，罗喉和计都位于黄道与白道的两个交点，是与日月五星七曜并列的两个隐曜。又南宋晁公武《郡斋读书志》卷十三说:《合元万分历》“唐曹氏撰，未知其名，历元起唐高宗显庆五年庚申。盖民间所行小历也，本天竺历为法(李献臣云)。”宋王应麟《困学纪闻》卷九也说:“唐曹士蔿《七曜符天历》，一云《合元万分历》，本天竺历法。”可见，《符天历》又叫《合元万分历》。这些记载还说明《符天历》与印度天文学有很密切的关系。

关于《符天历》对官历的影响，上述《新唐书·司天考》的记载说明后晋《调元历》承袭了《符天历》的方法。虽然《调元历》仅行用五年就被后晋政府废弃，但它并没有从此湮灭，它还被辽政权行用了 48 年之久。因此，它对官历的影响应该说是很深的。

《调元历》被废之后，又复用唐末的《崇玄历》。据史料分析，当时可能是《崇玄历》和《符天历》参用。如唐显德二年(955

年)，王朴奉旨造《钦天历》，《王朴传》云："显德二年，诏朴校定大历，乃削去近世《符天》流俗不经之学。"[1] 王朴在上(后)周世宗的奏议中说："臣检讨先代图籍，今古历书，皆无蚀神首尾之文，盖天竺胡僧之妖说也。只自司天卜祝小术，不举其大体，遂为等接之法。盖从假用以求径捷，于是乎交有逆行之数，后学者不能详知，便言历有九曜，以为注历之恒式，今并削而去之。"[2] 可见，直到周世宗时，在官方颁布的历书中，一直都将九曜作为历注的标准模式，每月有蚀神首尾的方位，由于王朴的反对才将这些内容删去。这里的"小术"当指《符天历》，历法是编制历书的依据，九曜成为注历恒式，说明《符天历》在相当长的时期内都在起着作用。

另外，前段引文中所说的"等接之法"、"以求径捷"，在《新唐书·历志六·崇玄历》记述该历作者边冈的情况时也有类似的说法："冈用算巧，能驰骋反复于乘除间。由是简捷、超径、等接之术兴。""径捷"一词可能就是这里"简捷"、"超径"的略语。就是说曹士芳《符天历》的算法对边冈也有影响，这一点在下文对相减相乘法造术原理的讨论中可以得到证明。边冈是唐末重要的历算大家，因此，《符天历》的地位不能低估。

《符天历》虽被贬为小历，在正史的天文律历志中不予记载，但从现有史料来看，它对官方的天文机构和民间都产生了很大的影响，应该有其特殊的原因。除下文将要讨论的《符天历》在历算方面的特点外，主要还有以下两点原因。

首先，中国古代的星占术，包括日月五星和交蚀在内，主要用于社会政治，以此预言国家的治乱和农业的丰歉。星占的另一个重要任务关系到皇家及大臣的吉凶祸福。而印度系统的星占，主

① 《新五代史》卷三十一"王朴传"。

② 《旧五代史》卷一百四十"历志"。

要关心用诞生时的九曜位置推算每个人的命运。就这一点来说，它与中国系统的星占完全不同，《符天历》与印度天文学关系密切，这很可能就是它在民间广为流传的一个重要原因。①

其次，《符天历》在民间流行的另一个重要原因是，它得到了佛教徒的支持，这也许就与它的印度特色有关。佛教宣传宿命论，认为人的命运是从诞生的那天起就已经决定了的。而一个人的命运好坏，可以借助于佛教天文学来推知，就是依各人诞生时的九曜方位来定。如前所述，《符天历》有九曜历，据此即可推算任何时刻的九曜位置，故民间广泛流传着每年的《符天历》历书。薮内清还指出，符天历法在日本进行正式研究的就是从天台僧人日延开始的，该历法还作为宿曜师们的教科书而起了重要作用。②

二　《符天历》的残本

如上所述，《新五代史·司天考》指出，后晋马重绩《调元历》是仿效《符天历》编制的，但《调元历》仅行用五年，正史律历志中没有记载，它的详细情况也是不明的。所以，现在对《符天历》的内容知之甚少，连它的回归年和朔望月数据都不知道。仅近年在日本天理图书馆发现了一个《符天历》的残篇《符天历经日躔差立成》，下面我们将对这个残本作一介绍。

《符天历经日躔差立成》（以下称《立成》）收录在日本历算家多多良保（1708～1784）所编的《天文秘书》中，是由东京天文台已故前山仁郎先生发现的。“立成”一词在唐宋时期的历算著作中经常出现，相当于数表的意思。“日躔”在中国古历中指太阳的运行轨迹，“日躔差”表示太阳不均匀运动的中心差。

① 陈久金．符天历研究．自然科学史研究，1986，5(1)：34～40

② ［日］薮内清著（柯士仁译）．关于唐曹士芳的符天历．科学史译丛，1983(1)：83～93

此《立成》前面的说明文字说[①]：“日躔差法，经文幽微，非久习者致或难了固。今新张立成，得其意定率即固。经朔、弦、望中日度分，以差积度分盈加、缩减，为定日度分。其后每日累加一度。若盈缩历一度以上九十一度以下，以差率盈加缩减；九十二度以上百八十二度以下者，以差率盈减缩加。次日定度分。去命度数，加常定法。专与经意不相违之。”这段文字是说明该《立成》的用法。大意是说，欲求某一天的太阳实际行度，只须从近地点开始，每天加一度，作为中日(日平行)度分，再以差积度分加减之。前半周以中日度分加差积度分，后半周以中日度分减差积度分，即得太阳实行。中国古代历法周天度取365度有余，尾余各历不同。此残存《立成》以整度为间隔，半周取182度，略去了尾数，故《符天历》的周天度数值不详。原《立成》分上下段记述0度(近地点)到182度(远地点)的盈缩度数和差积度分。182度到364度的数值与此完全相同，所以省略了。现把开头几行转引如下：

日躔立成

盈缩度数	差积度分
百八十二度	空
一度、百八十一度	五分四十八
二度、百八十	十分九十一
五分三十六	
三度、百七十九	十六分二十七
……	……

其中，三度上面的“五分三十六”字样，表示二度的差积度分十分九十一小分与三度的差积度分十六分二十七小分的差。这个

① 本文关于符天历残本的引文皆转引自前引薮内清的文章《关于唐曹士芳的符天历》。

《立成》经校订后译成现代数码即如表 5.2.1。

表 5.2.1　符天历日躔差立成表

平行度		盈缩度数 /分/小分		差积度数 /度/分/小分		平行度		盈缩度数 /分/小分		差积度数 /度/分/小分		
0	182	5	48	0	0	46	136	2	75	1	89	57
1	181	5	48	5	48	47	135	2	70	1	92	27
2	180	5	43	10	91	48	134	2	64	1	94	91
3	179	5	36	16	27	49	133	2	57	1	97	48
4	178	5	30	21	57	50	132	2	52	2	0	0
5	177	5	25	26	82	51	131	2	45	2	2	45
6	176	5	18	32	0	52	130	2	40	2	4	85
7	175	5	12	37	12	53	129	2	33	2	7	18
8	174	5	6	42	18	54	128	2	27	2	9	45
9	173	5	0	47	18	55	127	2	22	2	11	67
10	172	4	94	52	12	56	126	2	15	2	13	82
11	171	4	88	57	0	57	125	2	9	2	15	91
12	170	4	82	61	82	58	124	2	3	2	17	94
13	169	4	75	66	57	59	123	1	97	2	19	91
14	168	4	70	71	72	60	122	1	91	2	21	82
15	167	4	64	75	91	61	121	1	85	2	23	67
16	166	4	57	80	48	62	120	1	78	2	25	45
17	165	4	52	85	0	63	119	1	73	2	27	18
18	164	4	45	89	45	64	118	1	67	2	28	85
19	163	4	40	93	85	65	117	1	60	2	30	45

续表

平行度		盈缩度数/分/小分		差积度数/度/分/小分			平行度		盈缩度数/分/小分		差积度数/度/分/小分		
20	162	4	33		98	18	66	116	1	55	2	32	0
21	161	4	27	1	2	45	67	115	1	48	2	33	48
22	160	4	22	1	6	67	68	114	1	43	2	34	91
23	159	4	15	1	10	82	69	113	1	36	2	36	27
24	158	4	9	1	14	91	70	112	1	30	2	37	57
25	157	4	3	1	18	94	71	111	1	25	2	38	82
26	156	3	97	1	22	91	72	110	1	18	2	40	0
27	155	3	91	1	26	82	73	109	1	12	2	41	12
28	154	3	85	1	30	67	74	108	1	6	2	42	18
29	153	3	78	1	34	45	75	107	1	0	2	43	18
30	152	3	73	1	38	18	76	106	0	94	2	44	12
31	151	3	67	1	41	85	77	105	0	88	2	45	0
32	150	3	60	1	45	45	78	104	0	82	2	45	82
33	149	3	55	1	49	0	79	103	0	75	2	46	57
34	148	3	48	1	52	48	80	102	0	70	2	47	27
35	147	3	43	1	55	91	81	101	0	64	2	47	91
36	146	3	36	1	59	27	82	100	0	56	2	48	48
37	145	3	30	1	62	57	83	99	0	52	2	49	0
38	144	3	25	1	65	82	84	98	0	45	2	49	45
39	143	3	18	1	69	0	85	97	0	40	2	49	85
40	142	3	12	1	72	12	86	96	0	33	2	50	18

续表

平行度		盈缩度数 /分/小分		差积度数 /度/分/小分			平行度		盈缩度数 /分/小分		差积度数 /度/分/小分		
41	141	3	6	1	75	18	87	95	0	27	2	50	45
42	140	3	0	1	78	18	88	94	0	22	2	50	67
43	139	2	94	1	81	12	89	93	0	15	2	50	82
44	138	2	88	1	84	0	90	92	0	9	2	50	91
45	137	2	82	1	86	82	91	91	0	3	2	50	94

注：《符天历》日法为10 000，故这里的“1度=100分”，“1分=100小分”。

上列《立成》的末尾也有一段说明文字，叙述该《立成》的计算方法。这段文字十分艰涩难懂，日本学者中山茂给出了出色的解释。[①] 他指出若太阳的真黄经 λ 与平黄经 l 之差为 $\lambda-l$，则《符天历》的差积度分可由下式得到

$$\lambda-l=l(182-l)/3\ 300。\qquad(1)$$

如在表1的第2栏 $l=1$，其差积度分为5分48小分，由式(1)亦可得 $\lambda-l=0.054\ 8$，与表中的得数相同。

从理论上来看，真黄经与平黄经之差应符合公式 $\lambda-l=A\sin l$，在印度系统的天文学中就给出了这个公式。所以，中山茂教授在文章中得出结论：《符天历》的式(1)既不与印度传统的三角函数形式公式相同，也不与中国古代的半经验式的公式(指计算太阳运动不均匀改正的分段插值法公式)相同。也就是说，曹士蔿在此创造了一种新的数学方法。式(1)中平黄经 l 与半周天182度(舍去了余分)先相减后相乘，因此，我国古代天算家称式(1)这种

① [日] 中山茂. 符天历の天文学史的地位. 科学史研究，1964(71)：120～122

方法为“相减相乘”法。相减相乘是我国古历算法中的一种重要数学方法，经唐朝天算家边冈的继承与发展，开创了古历算法的公式化新局面，具有重要意义。最近新的研究结果表明：相减相乘与刘焯二次等间距插值法相比的确是一种新的数学方法，但曹士芀的公式是直接在刘焯公式的基础上发展而来的。所以，可以说相减相乘法还是中国古代历法的传统方法，虽然《符天历》可能在一定程度上受到了印度历法的影响。[①]

三　相减相乘法的造术原理

由于《符天历》已无传本，残本仅剩前面所说的日躔差表，探讨相减相乘法的造术方法是件十分困难的事情。所幸的是，曹士芀创立的相减相乘法被边冈发扬光大。边冈《崇玄历》的太阳中心差算法既记载有刘焯式的分段插值法，又录有曹士芀式的公式化算法。宋朝史仪的《仪天历》太阳中心差算法也是公式算法，且《仪天历》记录了其公式的推导思想，这些都为探讨相减相乘法的造术方法提供了宝贵的资料。

实际上，刘焯的插值法的思想是在一节气时段上构造插值公式。而曹士芀的相减相乘法则是在一个象限上（含 6 个节气），使用了和刘焯插值法完全相同的原理与方法，才得到其相减相乘法公式的。

设一象限的长度为 s 日，不妨取冬至到春分象限，盈缩积（即差积度数）为 Δ，太阳平近点角为 l（即平黄经），其中心差为 $f(l)$。则该象限的盈缩积的平均值为

$$\text{限率分} = \Delta / s。$$

由于冬至时盈缩度数最大，春分时盈缩度数最小（当为 0，见表

① 王荣彬. 中国古代历法中的中心差算式的造术原理. 西北大学学报（自然科学版），1995，25(4)：283～288

5.2.1)，按刘焯的太阳运动模型，[①] 当有限末率为 0，

$$限初率(\delta_0)=2\ 限率分=2\Delta/s，$$

则相邻两日的盈缩差率为

$$日差(d)=2\ 限率分/s=2\Delta/s^2。$$

从而，该象限第 1 日的盈缩率为

$$初定率(\delta_1)=2\Delta/s-\Delta/s^2，$$

第 k 日的盈缩率为

$$\delta_k=(2\Delta/s-\Delta/s^2)-(k-l)\frac{2\Delta}{s^2}。$$

前 l 日的盈缩积

$$\begin{aligned} f(l) &= \sum_{k=1}^{l}\delta_k \\ &= l\ \left[\frac{2\Delta}{s}-\frac{\Delta}{s^2}-\frac{l(l-1)}{2}\right]\frac{2\Delta}{s^2} \\ &= \frac{l\Delta}{s^2}(2s-l), \qquad 0<l<2s。 \end{aligned} \tag{2}$$

式(2)即为《崇玄历》、《仪天历》等的太阳中心差算式。在式(2)中取表 5.2.1 数据 $\Delta=2.509\ 4$，$s=91$，有

$$f(l)=\frac{2.509\ 4\cdot l}{91\cdot 91}(182-l)=\frac{l}{3\ 300}(182-l)。\tag{3}$$

显然，式(3)就是曹士芀的公式(1)。上述公式推导的过程说明，《符天历》和《崇玄历》、《仪天历》的太阳中心差算式是同一个公式，它们的造术原理和刘焯插值法的原理一脉相承。因此，可以说曹士芀的相减相乘法是一种整体插值法(相对于分段插值法而言)。

---

① 王荣彬. 刘焯《皇极历》插值法的构建原理. 自然科学史研究，1994，13(4)：293～304。

四　《符天历》的主要特点

分析中日有关《符天历》的文献，可知它主要有以下几个特点：

(一)不用上元积年

历元是一部历法的起算点。我国古代历法从《太初历》开始都将历元上溯到过去的几十万、几百万乃至数亿年，把从上元到制历年的年数称为上元积年。上元积年是中国古代历法的特有项目，目的在于宣扬历法的神圣性，上元积年的设立并无实际意义。随着历法的进步，人们意识到推算上元积年利少弊多。但传统往往是因循守旧，积习难改的。《符天历》以制历时的建中年间上溯到 120 年左右的唐显庆五年为起算点，叫做近距历元，和现代的历元意义一致。《符天历》以前的官历都没有采用过近距历元，唐开元六年(718 年)瞿昙悉达编译了《九执历》，其中采用近距历元，以显庆二年(657 年)为历元。《九执历》是基于印度天文学的历法，未能成为官历。马重绩在阐述不用上元积年的理由时说："自古诸历，皆以天正十一月为岁首，循太古甲子为上元。积岁弥多，差阔至甚。臣改法定元，……取唐天宝十四载乙未，立为近元，以雨水正月朔为岁首。"马重绩的话大致可以代表曹士蒍的观点。

(二)以唐显庆五年雨水为历元

中国古代历法大多以寅月为正月，以冬至朔旦夜半为历元。这样，历元和岁首便不在同一个月。将历元设在冬至的理由是，按照中国的天文学传统，冬至时刻最容易直接测量。但是，历元与岁首不在一起，计算起来总是不便，也不整齐。正是出于这一考虑，刘宋何承天的《元嘉历》就曾将历元设在正月朔旦雨水夜半。但后世历家都仍然习惯于以冬至为历元。《符天历》以雨水为历元是继《元嘉历》以后，第二次作出的改革尝试。顺便指出，薮内清教授等日本学者认为前面提到的《符天历》以雨水为岁首的

“岁首”是“气首”的误文。原因是显庆五年雨水为正月三日，与朔日相差二日。

（三）以一万为日法

日法是指朔望月日数奇零部分的分母。唐以后历法的天文数据都取共同的分母，日法的意义就相应地扩大了。中国古代历法不用小数，奇零部分都用分数计算，这就加大了历法计算的工作量。唐中宗时南宫说的《神龙历》首先将天文数据中奇零的部分以“余”、“奇”、“小分”分别作为百进分数，第一次作了简化奇零部分计算的尝试。曹士蒍继续作出改革，以一万为分母，相当于计算到小数四位，以一万分为日法，是《符天历》的一项重要革新，是中国历法的一大进步。

可见，以上这些特点都是《符天历》中具有进步意义的革新内容。可惜的是，由于这些革新与中国传统历法格格不入，促成了它被贬成小历的局面，人们现在反而不能了解这部优秀历法的主体内容了。

第三章　经济工作中的数学

第一节　经济数学家刘晏及其贡献

《新唐书·食货志》开头就说："古之善治其国而爱养斯民者，必立经常简易之法，使上爱物以养其下，下勉力以事其上，上足而下不困。故量人之力而授之田，量地之产而取以给公上，量其入而出之以为用度之数。是三者常相须以济而不可失，失其一则不能守其二。"它提出了经济数学的问题。

一　时代环境与身世

唐代的"贞观之治"与"开元之治"，在我国历史上是素负盛名的。但从"安史之乱"以后，"兵革之兴，累世不息，而用度之数，不能节矣。加以骄君昏主，奸吏邪臣，取济一时，屡更其制，而经常之法，荡然尽矣。"[①] 结果是行之已久的均田制被破坏，造成土地大量兼并，使"富者万亩，贫者无容足之居。"[②] 民不堪其苦。但就在这一时期，也出现了善于理财的经济数学家如刘晏、李巽这样的被《旧唐书》誉为"便时利物，富国安民，足为世法"的大能人。

刘晏(715～780)，字士安，曹州南华(今山东荷泽西)人，中唐著名的理财家。8岁(一作7岁)时碰上唐玄宗上泰山祭天，他也在献颂的行列里。玄宗见他年幼，让宰相张说考考他，张说说

① 《新唐书·食货志一》。
② 《新唐书·食货志二》。

"果然是国家杰出的人才"。当即被授予"太子正字"的官衔，号为"神童"，名震一时。天宝中担任夏县(今山西夏县)县令时，被认为"贤良方正"，老百姓刻石怀念。后来，先后为殿中侍御史、河南尹、京兆尹、户部侍郎判度支郎中等职。代宗宝应二年(763年)一度出任吏部尚书、平章事。但仍领度支、盐铁、转运、租庸调使，是国家管理经济、财政的主要高级官员之一。从广德二年(764年)至大历末(779年)，在他历时十多年以户部侍郎、度支郎中主管理财工作任内，执法严密，"官无遗利"。他自己更以身作则，十分俭朴，"所居修行里，粗朴庳陋，饮食俭狭，室无媵婢。"[①]他开始主管国家财政时，盐的收入才60万贯，到后来，超过了它的10倍。国家一年的全部收入达到1 200万贯，其中一半以上是从卖盐专利中获得的。这时，虽国家财政大增而百姓却不感到税赋太重。可是，像这样一位为当时做出过重大贡献的理财专家，却于建中元年(780年)七月，在宰相杨炎私怨报复下，被诬为"谋作乱"，并"诏赐死"。家属也受牵连，"徙岭表，坐累者数十人。天下以为冤。"卒年65岁。

二　重任与贡献

唐制，户部设尚书一员，侍郎二员。"尚书、侍郎之职掌天下田户、均输、钱谷之政令，其属有四：一曰户部，二曰度支，三曰金部，四曰仓部。""度支郎中一员，员外郎一员。郎中、员外郎之职，掌判天下租赋多少之数，物产丰约之宜，水陆道途之利。每岁计其所出而度其所用，转运征敛送纳，皆准程而节其迟速。凡和籴和市，皆量其贵贱，均天下之货，以利于人。凡金银宝货绫罗之属，皆折庸调以造。凡天下舟车水陆载运，皆具为脚直，轻重贵贱，平易险涩而为之制。凡天下边军，有支度使，以计军资

① 《新唐书·刘晏传》。

粮仗之用。每岁所费，皆申度支会计，以长行旨为准。”[①]

代宗广德二年(764 年)刘晏任御史大夫，“领东都、河南、淮西、江南东西转运、租庸、铸钱、盐铁、转输至上都”（京师)[②]。这是在“安史之乱”后，唐王朝经济遭到严重破坏，京师粮食奇缺，“斗米价至一千，官厨无兼时之积，禁军乏食，畿县百姓乃挼穗以供之”[③] 的困难之时，刘晏受命主管朝廷、京畿的军用、民需工作,而且很快就把江南杭嘉湖的粮食从水路运到了京师。“自此，岁运米数千万石以济关中”，且“不发丁男，不劳郡县”，创造了自古未有之奇迹。从此，解决了京畿的粮荒问题，也平定了关中一带飞涨的物价。当运粮船队首次运到京城长安时，天子李豫非常高兴，特派卫士到东渭桥(京城太仓所在)以鼓乐相迎，并“驰使劳曰：‘卿，朕酂侯也。’”[④]

刘晏是用什么办法完成这一重大使命的？

(一)漕运

他抓住了如何既迅速，又能减轻运费把江南丰足的粮食北运到京城这一当时的矛盾，把自己的全部精力用在转运工作上，而把“盐利顾(雇)佣分吏督之”。[⑤]

其次，他对省钱省力的水路运输作了全面细致的实地调查研究，总结了前人的经验教训，提出了以水运解决全局问题的四个好处、四个困难问题写信给宰相元载。

四个好处是：①京师及其附近，人民苦于重税，江南的粮食运到，徭赋就可减轻一半。②洛阳一带损伤严重，人民都已逃亡，如漕运流通，人民会相继返回。③因缺粮，有的军官不听指挥，外

---

① 《旧唐书·职官志二》。

②⑤ 《新唐书·食货志三》。

③ 《旧唐书·刘晏传》。

④ 《新唐书·刘晏传》，此处借用萧何佐汉高祖刘邦的故事。

族也趁机侵害。粮食源源运来，就可震慑他们。④水陆交通畅通了，百货聚集，就能恢复贞观、永徽年间那样的盛世。

四个困难问题是：①从宜阳、熊耳至虎牢、成皋(在今郑州至三门峡之间)的500里内，只有1 000多户人家，非常荒凉，转车挽漕，劳力不足。②自“安史之乱”以后，水利未修，河道淤塞，河岸崩坍。千里泗水，就像不在水上航行一样。③东垣、底柱、渑池、北河600多里之间，久无防守，沿河二岸，偷盗抢夺的人很多。④淮阴到蒲坂，路3 000里，驻军很多，多缺衣少食，粮船经过，往往截留充为军饷，难以制止。

宰相元载接到他的信以后，把处理漕运的事全权交给了他，这就坚定了他的信心，充分发挥了他的才干。[①]

他的具体措施是全面改革过去使用的漕运办法，因而既快又省且安全地完成了任务：

1. 重新使用开元间裴耀卿提出的“节级转运”的办法，分别设置储仓，以江、淮、河、渭水流深浅不同，随宜制造大小不同的运载船只，节节转运，即“江南之运积扬州，汴河之运积河阴，河船之运积渭口，渭船之运入太仓。”[②] 这样不仅变过去“水行远来，多风波覆溺之患，其失尝十七八”[③]，为“岁转粟百一十万石，无升斗溺者”[④]，而且使过去因汴水太浅或河水大涨而使漕运阻塞数月的情况，大大改善，自扬州运至京都，只需40天就够了。

2. 改变装载办法，利用废弃之物，尽量节约运费。如把散装改为袋装，以节省人力；用麻皮，篾条做成挽绳，坏了换下来可以当柴烧，以节省开支。结果仅从润州(今江苏镇江)到扬州，每斗米运费从过去的19钱，一下就减少了15钱。

3. 编成船队。每船载千斛，“十船为纲”(一队)；每纲300人，

---

① 《新唐书·刘晏传》。

②③④《新唐书·食货志三》。

配篙工 50 人；从扬州派部队押运到河阴(今河南荥阳北)。这样既安全，每斗米还可省下运费 90 钱。

4. 派官吏驻守丹阳湖(在苏皖交界处)，禁止在这里引水灌溉，以保证河漕不涸，粮船畅通。

(二)以盐利补漕运

过去盐铁与漕运是分开管理的。刘晏以盐铁与漕运都由他一人主管的有利条件，在国家经济十分困难的情况下，他利用盐的专卖获取巨利，并“以盐利为漕佣”。就是用获取的盐利来补偿漕运雇佣的开支，既不增加国库开支，又不增加老百姓的徭役负担。

刘晏认为“盐吏多则州县扰”，因此，他的主要办法是改革盐专卖法，把过去第五琦采用的全部官卖制，即官收、官运、官销，改为“就场专卖”制，即官收，商运，商销。大量裁减盐吏，减少人头开支。具体措施是“出盐乡因旧盐置吏，亭户(盐户)粜商人，纵其所之。江岭去盐远者，有常平盐，每商人不至，则减价以粜民。”[①] 就是说只在产盐地区设置盐官，保留涟水、湖州、越州、杭州、四个盐场和嘉兴，盐城，侯官等 10 个盐监，负责食盐的生产和收购。又设置 13 个巡院，负责推销官盐，缉拿走私盐贩，并兼管不设盐监地区的食盐产销工作。盐官统一收购盐户生产的盐，现场卖给盐商，盐商便可自由出卖，不受任何限制。[②]

当时不少地方官吏“加榷盐钱，商人舟过有税，晏奏罢州县率税，禁堰埭邀以利者。”[③]盐专卖改革以后，“商人纳绢以代盐利者，每缗加钱二百，以备将士春服”。这样，不仅推销了食盐，又获得了军用绢布，可谓一举二利。

经过这一改革和整顿，既改善了食盐供应，又增加了国家财政收入。当时“天下之赋，盐利居半，宫闱服御、军饷、百官俸

①③《新唐书·食货志四》。

② 张泽咸. 唐五代赋役史草·五章·盐税. 北京：中华书局，1986

禄，皆仰给焉”。而且“官收厚利而人不知贵”。刘晏以盐利补漕运，“不发丁男，不劳郡县”，两全其美，这又是他经济数学思想的重要表现。

（三）平抑粮价、物价

《新唐书·刘晏传》说他“能权万货重轻，使天下无甚贵贱而物常平。”刘晏的理财理论和方法，也体现在收购粮食上。他对粮价的统计和收购量、平稳粮价等给出了一个排序原理的数学模型的雏形。宋代的沈括说：“刘晏掌国计，数百里外物价高下，即日知之。”又说：“有人得晏一事，予在三司时，尝行之于东南。每岁发运司和籴米于郡县，未知价之高下，须先具价申禀，然后视其贵贱，贵则寡取，贱则取盈。尽得郡县之价，方能契数行下。比至则粟价已增，所以常得贵售。”

“晏法则令多粟通途郡县，以数十岁籴价与所籴粟数高下，各为五等，具籍于主者(今属发运司)。粟价才定，更不申禀，即时廪收。但第一价则籴第五数，第五价则籴第一数，第二价即籴第四数，第四价即籴第二数，乃即驰递报发运司。如此，粟贱之地，自籴尽极数，其余节级，各得其宜，已无枉售。发运司仍会诸郡所籴之数计之，若过于多，则损贵与远者；尚少，则增贱与近者。自此粟价未尝失时，各当本处丰俭，即日知价。信皆有术”[①]。

这两段资料，既包括刘晏的方案，也包括沈括的运用，都获得了成功。

沈括与刘晏的方法是，让交通沿线产粮多的郡县，把几十年间的购粮价和购粮数各分为五等，分别为

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>0,$$
$$b_1>b_2>b_3>b_4>b_5>0。$$

① 〔宋〕沈括. 梦溪笔谈，卷十一。“国”计、“枉”售，“四库”本作“南”计、“极”售，今据胡道静. 梦溪笔谈校证改. 上海：古籍出版社. 1987

收购时粮价为 a_i 的购粮数为 $b_j(i,j=1,2,3,4,5)$。有人论证了，在刘晏的籴法中，反序和

$$S=a_5b_1+a_4b_2+a_3b_3+a_2b_4+a_1b_5$$

为最小，故同样购粮 $\sum_{i=1}^{5}b_i$ 刘晏的方法最经济。这种方法隐含着排序原理。[①]

刘晏方法的基础是统计，没有多年的统计就无法定出粮价等级，也无法确定某时购粮的等级。怎样才能迅速知道某时某地的粮价呢？刘晏在许多地方设置了信息员，信息灵通。《旧唐书・刘晏传》说："自诸道巡院距京师，重价募疾足，置递相望，四方物价之上下，虽极远不四五日知。故食货之重轻，尽权在掌握。朝廷获美利而天下无甚贵贱之忧，得其术矣。"有了信息员，就能使"四方水旱及军府纤芥，莫不先知焉。"

（四）以购代赈

刘晏处在战乱以后不久，人民生活困苦之时。他爱护老百姓，信息灵通，"每州县荒歉有端，则计官所赢，先令曰'蠲某物，贷某户'，民未困而奏报已行矣。"[②]但他的救灾办法不是简单地给予赈济，因为那样做，"赈给少则不足活人，活人多则阙国用，国用阙则复重敛矣"。而且往往造就那些不好的官吏营私舞弊，让不该赈济的人得到了赈济，该赈济的人却得不到。既花了国家的大量钱财，又害了一些官员，是为"二害"。他认为"灾沴之乡，所乏粮耳，它产尚在。贱以出之，易其杂货，因人之力，转于丰处，或官自用，则国计不要；多出菽粟，恣意粜运，散入村闾，下户力农，不能诣市，转相沾逮，自免阻饥，不待令驱。"受灾地区，往

① 席振伟，刘晏．经济工作中的数学思想研究．自然科学史研究，1995，14(2)：132～139

② 《新唐书・刘晏传》。

往只是粮食减产，其他的山货，畜产还是有的，政府就地以购代赈，以大量粮食低价交换收购老百姓的各种货色。人民有了便宜的粮食交换，不要等到别人驱使，也会勤力生产，免于饥饿，这是“二胜”。

刘晏这一安民措施自广德二年(764 年)到建中元年(780 年)的十几年间，使国家统计的民户增加了 300 多万户。刘晏还采用常平法“丰则贵取，饥则贱与”，使各州县的储粮也达到 300 多万斛。

(五)围湖造田问题

清代董浩等主编的《全唐文》(卷三七〇)载有刘晏的《奏禁隔断练湖状》：

“东都河南江淮等道转运使检校户部尚书兼御史大夫刘晏状：得刺史韦损丹阳耆寿等状，上件湖，案图经周回四十里，比被丹徒百姓筑堤横截一十四里，开渎口泄水，取湖下地作田。其湖未被隔断已前，每正春夏，雨水涨满，侧近百姓，引溉田苗；官河水干浅，又得湖水灌注。租庸转运，及商旅往来，免用牛牵。若霖雨泛溢，即开渎泄水，通流入江。自被筑堤已来，湖中地窄，无处贮水，横堤壅碍，不得北流。秋夏雨多，即向南奔注，丹阳、延陵、金坛等县，良田八九千顷，常被淹没，稍遇亢阳，近湖田苗，无水溉灌。所利一百一十五顷田，损三县百姓之地。今已依旧涨水为湖，官河又得通流，邑人免忧旱淹。奏闻中书门下，牒浙西观察使与韦损，勿使更令修筑，致有妨夺。”

刘晏经过调查、分析和对比，认为围湖造田从大局看，得不偿失：

其一，围湖造田仅仅增加了 115 顷耕田，却使丹阳等三县的八九千顷良田受害。其二，原来水多时可以开渎放水入江，以防内涝；干旱时又有充足的水源防止旱灾。围湖造田后，湖面变小了，蓄水量下降，天干旱无水灌溉，水多了又使江水倒灌成灾。其

三，官河(运河)干浅时，原需湖水灌注，“使租庸转运，及商旅往来免用牛牵”。造田 100 多顷，影响了整个东南的交通运输。

从围湖造田这个问题上，也充分体现了刘晏的数量对比思想和一举多得的运筹观念。

刘晏善于理财，是中唐杰出的经济数学家。他工作勤奋，处事快捷。随身佩带算筹并及时筹算，当日的事，当日就处理完毕。生活十分俭朴。

刘晏冤死以后，他的理财思想方法和他制定的理财办法，在较长的时间内，仍被沿用。而且对后代也有较大的影响。

第二节 度量衡与数学

一 数与度量衡

人类在生产、生活活动中，从形象的变化中发现了事物的增减，就产生了数的意识。所以“古人之论‘数’曰‘物生而后有象，象而后有滋，滋而后有数。’然则天地初形，人物既著，则算数之事生矣。”[①]《通鉴》说：“黄帝命隶首作数，以率其羡，要其会，而律度量衡由是成焉。”

相传我国的度量衡制度，始创于黄帝，而以十二律之首黄钟为本，用以为度量衡的标准。《汉书·律历志》说：“度者，所以度长短，本起黄钟之长；量者，所以量多少，本起黄钟之龠；权者，所以称物平施，知轻重，本起黄钟之重。”

黄帝至夏、商、周、秦各代，对度量衡的单位标准都无定制。但至王莽时，变化最大，并制颁了标准器。自《汉书·律历志》记载了用黄锺与秬黍为度量衡的完备制度后，历代都以此为本，但

① 《后汉书·律历志》。

又有所不同。

“度量衡”之名，起于《虞书》“同律度量衡”，这是合称。分别称为“度”、“量”、“衡”。它们起于汉刘歆之条奏“审度”、“嘉量”、“衡权”。指的分别是长度、容积和轻重。

度量衡与“数”的计算关系密切，古代算家在他们的算书如刘徽的《九章算术注》、孙子的《算经》中，无一例外都对长度、容积、重量进行计算。可见单位与进制，在数学中至关重要。

《汉书·律历志》记长度单位为丈、尺、寸三种，并在丈上增引，寸下增分，合称“五度”，都是十进。记容积单位为斛、斗、升、合、龠，合称“五量”。其中一合等于二龠，合以上都是十进；记重量单位为石、钧、斤、两、铢，合称“五权”。其进位是1石=4钧；1钧=30斤；1斤=16两；1两=24铢。

东汉以后，三国、两晋、南北朝到隋代，度量衡单位标准都有一些变动，较为混乱。据《隋书·律历志》载：“后周市尺开皇著令以为官尺，百司用之，终于仁寿”（此官尺为律尺之一尺二寸）；“开皇官尺，大业中人间或私用之”；“开皇以古斗三升为升，古秤三斤为斤，大业中依复古制”。足见隋代已出现过大小二制。

二　中唐的度量衡制

唐初度量衡制，承隋开皇之制并参照《汉书·律历志》积秬黍之说，定出大尺、大斗、大两。这就是传本《夏侯阳算经》“言斛法不同”中说的“时异事变斗尺不同。以古就今临时校定，始可行用。”而明文制定大小二制实施之范围，则是从唐玄宗御撰唐《六典》开始。

唐《六典》载：

“凡度，以北方秬黍中者一黍之广为分，十分为寸，十寸为尺，一尺二寸为大尺，十尺为丈。凡量，以秬黍中者容一千二百黍为龠，二龠为合，十合为升，十升为斗，三斗为大斗，十斗为斛。凡

权衡，以秬黍中者百黍之重为铢，二十四铢为两，三两为大两，十六两为斤。凡积秬黍为度量权衡，调锺律，测晷景，合汤药，及冠冕之制，则用之，内外官私悉用大者。”

隋开皇官斗，以古斗三斗为一斗，官秤以古秤三斤为一斤。唐承隋制后，开皇官制，在官民之中已经通行，所以随俗而定，颁行为大制。但隋大业中，已改用小制，尺用梁表尺，斗秤则依古制，废除了“古斗三升为升，古秤三斤为斤”的大制。所以唐玄宗又颁行只能用于“调锺律、测晷景，合汤药及冠冕”之小制，规定除此四种范围外，都用大制。这是唐代度量衡制不同于前代的重大区别，对后代度量衡制度影响很大。

唐代对度量衡的行政措施十分严厉，规定各种度量衡器每年要定期校核，并要得到官方验证后，才能使用，否则就要分别治罪。这就是传本《夏侯阳算经》说的：“仓库令诸函所在官造大者五斛、中者三斛、小者一斛以铁为缘，勘平书印，然后给用。”

监校官校勘不准，或知情不报让其使用的，也要分别受到处分。管理度量衡的是太府寺，京城使用者，每年八月到太府寺校准，京城以外，则届时到所在各州县核准。对于故意缺斤短两，“增减赃重者，计所增减准盗论”处。

制度虽然严厉，违反者还在所难免。因此，当时还在市区设置了“公量”（就像现在的“公平秤”一样），“以为公用”。据《南部新书》载“柳仲郢拜京兆尹，置权量于东西市，使贸易用之，禁私制者。北司史入粟违约，仲郢杀而尸之。自是人无敢犯。”[①] 度量衡与人民的生产，生活息息相关，在经济数学中也是不可缺的。

① 吴承洛．中国度量衡史．八章．二节引．上海：商务印书馆，1937

第三节　税法与贸易中的数学

本章第一节我们讨论了刘晏经济数学思想的成功与贡献，已涉及贸易(盐专卖)问题。本节我们再以唐代税法(包括贸易税)的改革，看经济数学应用在社会经济中的重要作用。

一　中唐前的租庸调

租庸调起始于曹魏的户调制度，历代沿用，但税率、办法略有变通。直到中唐德宗建中元年(780年)，采行宰相杨炎的两税法为止，当时已实行了五百多年的实物租税才改以货币征收。

唐初沿用均田制。丁男人授田百亩，其中80亩为口分田，20亩为永业田。永业田可以买卖，口分田死后政府要收回。规定一年一造帐，三年一造籍。均田制是租庸调制的基础。

唐初，每丁岁纳粟二石或稻谷三斛，谓之租。随乡所产，岁输绫、绢、絁二丈，布加五分之一；输绫、绢、絁者兼绵三两；输布者兼麻三斤；不输绢、布者输银十四两，谓之调。每丁岁役二旬，闰年加二日，不役则日输绢三尺，谓之庸。有事加役十五日者，免其调；加役三十日者租调全免。凡有水旱虫霜为灾，损十分之四以上者免其租；损六以上者免其调；损七以上者，课役全免。租庸调以丁为本，计口授田。“有田就有租，有丁则有庸，有家则有调。”①这种赋役法，“有轻徭薄赋的精神，奠定了唐代盛世的基础。”②

但是，这种制度实行多年以后，弊端也日益增多，主要是宽乡和狭乡口分田和永业田比例不一，授田数不足，豪强开始土地

---

① 《新唐书·食货志一》。

② 丁宗先，主编. 中国经济百科全书(经济史). 台北：联经出版社，1986

兼并。尤其是安史之乱以后，户丁逃亡，土地大量兼并，贫者失业，租庸调的基础崩溃；国库开支增大，而赋税却大量减少的矛盾十分突出；民穷财尽，税制已到了非改不可的时候了。

二 中唐开始实施的两税法

建中元年(780年)，新即位的德宗李适采纳宰相杨炎的建议，改革租庸调法，制定了两税法。此一税法直到明末实行一条鞭法以前，在我国先后实行了800多年。

这一税制的改变，不仅是税制本身的改革，而且反映了社会经济的变迁。那时，均田制已崩溃，土地私有形态大为发展，国家税收重在土地而不在人丁。因此，以民户土地等资产为征收对象的两税法就应运而生了。此外，盛唐时自然经济发达，赋役征收以实物为主。中唐以后，工商贸易逐渐发达，货币经济渐兴，因此，两税法改为以钱征收。“由于当时货币经济尚未成熟，实际征收时，也征收实物。”①

“两税”的含义，目前尚有不同的看法，有的学者认为两税是夏、秋两次征收的新创的资产税，有的认为其来源于租庸调的补充税收，地税和户税。

两税法的主要内容是：(一)量出制入，先确定全国总税额，再分摊到各州县征收。(二)不分主户客户，一律在现居地立户籍。(三)不分丁男、中男，以贫富定出户税等级；根据田亩多少征收田税。(四)不在居处的行商，按三十分之一在当地纳税，和当地的居者(坐商)一样。(五)废除租庸调及其他一切税目，仅保留丁额。(六)每年两次纳税，夏税不过六月，秋税不过十一月。(七)田税以大历十四年(779年)的垦田为准。还规定，如果在两税之

① 于宗先，主编．中国经济百科全书(经济史)．台北：联经出版社，1986

外，另以其他名目征收，以枉法论处。[1]

两税法的实施，大大简化了征税的项目，统一了国家税收。由过去的按丁征收，改变为按资产、田亩征收，征收时间也比较固定。它适应了当时生产力的发展与提高，以及生产关系的某些变革。

两税法实施以后，“在相当长的时间内，物价一再降低，朝廷控制的户口陆续有所增加，各地有不少城镇兴起，商业贸易有了新的发展。”[2]当时，虽然只有矿冶、盐、茶、酒等不多的商品纳税，但仅盐的专卖收入在国家总收入的比重中就很大。《旧唐书·杨炎传》说，实行以后，“天下便之。人不土断而地著，赋不加敛而增入，版籍不造而得其虚实，贪吏不诫而奸无所取。自是轻重之权始归于朝廷。”又据《通典》卷六载：“建中初，……分命黜陟使往诸道收户口及钱、谷名数，每岁天下共敛三千余万贯，其二千五十余万贯以供外费，九百五十余贯供京师。税米、麦共千六百余万石，其二百余万石供京师，千四百万石给充外费(《新唐书·食货志》作‘岁敛钱二千五十余万缗，米四百万斛以供外，钱九百五十余万缗，米千六百万斛以供京师’)。”这与《旧唐书·食货志》所载“大历末(按：两税法实行前一年)，通天下之财，而计其所入，总一千二百万贯”相比超过一倍多。可见两税法的实施，百姓是比较满意的，对增加国库收入，繁荣社会经济也是有促进作用的。两税法实行以后，农民逃亡事件之所以再度发生，国库收入再度减少，不是两税法本身的问题，而是因为决策者的昏庸和战乱时起。据《新唐书·食货志》载：“税法既行，民力未及宽，而朱滔、王武俊、田悦合从叛，用益不给，而借商之令出。……德宗以问度支杜佑，以为军费裁之数月，幸得商钱五百万缗，可

---

① 《旧唐书·杨炎传》。

② 张泽咸. 唐五代赋役史草(第四章. 五节)，北京：中华书局，1986

支半年。乃以户部侍郎赵赞判度支、代佑行借钱令，……民不胜冤自经者，家若被盗。……长安为罢市，市民相率遮邀宰相哭诉。……淮南节度使陈少游增其本道税钱，每缗二百，因诏天下皆增之。”昏君自己破坏了单税制原则，开始加税，后来下面也就有了税外之税，什么“间架税”(房屋税)、“除陌钱”(给与及买卖)和其他杂税都先后出来了。

从中唐税制改革成败二方面的经验教训中，我们不难看出，经济数学在决策者的运筹帷幄及社会经济中的作用。

第六编

晚唐、五代历算

第一章　历法与数学

本卷第四编前两章讨论唐代的历算，到曹士芀的《符天历》，本编则论述曹士芀以后的历法与数学问题。这段时期为唐代后期，即相当于9世纪的100年，共有《观天历》、《宣明历》和《崇玄历》三部历法。五代时期(907～960)虽有不少历法，但真正行用而有内容留下的只有《调元历》和《钦天历》二历而已。

第一节　《观天历》与《宣明历》

《观天历》和《宣明历》是9世纪初的两部历法，据载："宪宣即位，司天徐昂上新历，名曰《观天》。起元和二年用之，然无蔀章之数。至于察敛启闭之候，循用旧法，测验不合。至穆宗立，以为累世缵绪，必更历纪，乃诏日官改撰历术，名曰《宣明》。"《观天历》被认为主要是"因《大衍》之旧"，对一些地方稍加增损而成。[1] 评价不高。元和二年为公元807年，穆宗即位于821年，两历相距14年。《宣明历》的作者为谁？上引只说是"日官"，很

① 《新唐书》卷三十上. 北京：中华书局，1986年. 739

多研究者认为就是徐昂，本书也作徐昂处理。

《观天历》失传,《宣明历》于唐长庆二年(822 年)在全国施用，直到昭宗景福元年(892 年)，前后达 71 年之久。该历于 859 年传入日本，并在日本长期采用，800 多年之后才由明代的《大统历》所代替。宋代人说:《宣明历》是《大衍历》之后，“法制简易，合望密近，无能出其右者。”① 朱文鑫说:“其推日食，创时、气、刻三差，尤为前历所未有也。”② 所谓“时、气、刻三差”是指在日食时由于月亮的视差影响到交食的时差、气差和刻差三种差。由于视差的影响，致使对日食的食分，甚至有无交食发生的推算产生一定的难度，这要由气差与刻差进行校正，而合朔到食甚时刻的时间要由时差给出改正值。下面把“三差”及其在计算“食定余”、“气差定数”和“刻差定数”中的使用，以现代方法进行分析。

食定余——

“凡日食，以定朔日出入辰刻距午正刻数，约百四十七，为时差。视定朔小余如半法已下，以减半法，为初率；已上，减去半法，余为末率。以乘时差，如刻法而一，初率以减，末率倍之，以加定朔小余，为食定余。”③

日食发生在朔日，是日食的必要条件，因此日食计算必须是朔日的时刻，当时一昼夜 100 刻，《宣明历》规定：刻法 84。于是有

$$时差(p)=\frac{147}{定朔日出入辰刻距午正刻数}。$$

设 δ 为定朔小余，若 δ<半法，则

$$初率=半法-\delta。$$

---

① 《新唐书》卷三十上．北京：中华书局，1986．744

② 朱文鑫．《历法通志》．上海：商务印书馆，1934．163

③ 《新唐书》卷三十上．北京：中华书局，1986．742．下面所引两条同此。

若δ>半法，则

$$末率=\delta-半法。$$

$$食定余=\begin{cases}\delta+p-(p\times 初率)/84,\\ \delta+2(p\times 末率)/84。\end{cases}$$

所谓“食定余”就是食甚时刻，且是经过校正的所见食甚的时刻。

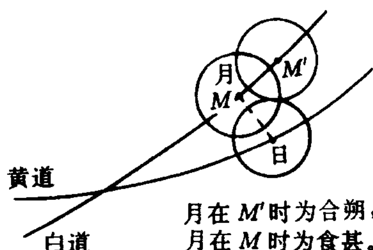


图 6.1.1

气差——

“凡日食，有气差，有刻差，有加差。二至之初，气差二千三百五十。距二至前后，每日损二十六，至二分而空。以日出没辰刻距午正刻数，约其朔日气差，以乘食甚距午正刻数。所得以减气差，为定数。春分后，阴历加之，阳历减之；秋分后，阴历减之，阳历加之。”

这段文字讲“气差”和由气差所算得“定数”（应为“气差定数”），而气差是变化的，冬至和夏至的气差为 2 350，以“距二至前后”，每日减少 26，到春分和秋分时，气差为 0。实际上一个回归年 $365\frac{1}{4}$ 日被平均分为 4 段，每段为 91.312 5 日，而 2 350 这个数恰是(91.312 5−1)×26=2 348.125 而来(少 1.875)，减 1 是因为至日为空。设 n 为至后的日数，$f(n)$为第 n 日的气差，日损 26 为 Δ，则

$$f(n)=2\ 350-n\Delta。$$

当$n=0$时为二至日，当$n=91.3125-1$时为二分日。气差的变化可用图形表示。（如图6.1.2）“定数”由下列的公式给出

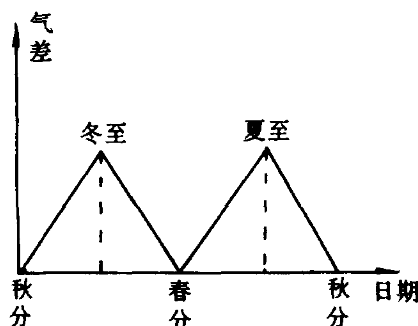


图 6.1.2

$$\text{定数}=f(n)-p\times\left(\frac{\text{朔日气差}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}}\right)。$$

但是定数要根据食日所在时间段的不同而有正负号的区别。设H为食日距冬至日的日数，当$H<182$日时，为入阳历；$H>182$日时，$H-182$为入阴历。上面的引文说：“春分后，阴历加之，阳历减之；秋分后，阴历减之，阳历加之”，就是食日在春分后，如果是入阴历，则定数取加号，入阳历取减号；在秋分后，如果是入阴历，则定数取减号，入阳历取加号。

刻差——

“二至初日，无刻差。自后每日益差分二、小分十。起立春至立夏，起立秋至立冬，皆以九十四分有半为刻差。自后日损差分二、小分十，至二至之初损尽。以朔日刻差乘食甚距午正刻数，为刻差定数。”

刻差和气差一样也是变化的，可是分为六段：由冬至至立春按等差递增，由立春至立夏为常数，由立夏至夏至按等差递减；由夏至至立秋又按等差递增，由立秋至立冬为常数，由立冬至冬至

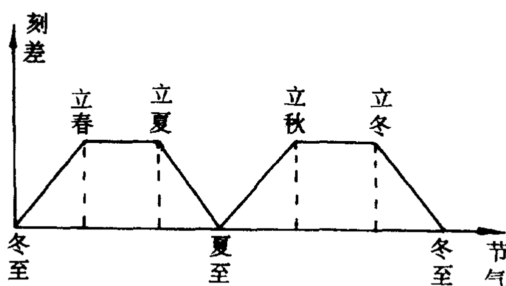


图 6.1.3

按等差递减。如图 6.1.3，设损益差为 Δ，冬至后第 n 日的刻差为 $f(n)$，常数为 c，则

$$f(n)=\begin{cases} n\Delta, & \text{(冬至至立春、夏至至立秋)}, \\ c, & \text{(立春至立夏、立秋至立冬)}, \\ c-n\Delta, & \text{(立夏至夏至、立冬至冬至)}。 \end{cases}$$

又设“刻差定数”为 K，有

$$K=\text{朔日刻差}\times p$$

和气差定数一样，由于食甚所在时间段的不同，K 也取不同符号，即“冬至后食甚在午正前，夏至后食甚在午正后，阴历以减，阳历以加；冬至后食甚在午正后，夏至后食甚在午正前，阴历以加，阳历以减。”

《宣明历》创设“三差”是有关日食预报的重要成果，为后世宋元历法家所采用①，影响很大。在计算中多次使用相当于等间距一次插值法。陈遵妫评价说：“就计算法来说，宣明历简化了一行的内插公式，达到在高斯内插公式中，和忽略三校以上的公式完全相同的结果，这不能不说是一个伟大的功绩。”② 这是从历法计

① 傅健，李志超. 宋历步交会术中“三差”的计算方法. 自然科学史研究，1992，11(4)：307～315

② 陈遵妫. 中国天文学史第三册. 上海：上海人民出版社，1984. 1465，注②。

算改进的角度讲的，说明徐昂在运用数学处理历法计算时有很高水平。

在《宣明历》中，计算“七曜入宿度”时用不等间距二次内插法：

“凡刻法乘盈缩分，如定气而一，曰气中率。与后气中率相减，为合差。以定气乘合差，并后定气以除，为中差。加、减气率，为初、末率。倍中差，百乘之，以定气除，为日差。半之，以加、减初、末，各为定率。以日差累加、减之，为每日盈缩分。”①

根据术文，设k为刻法，Δ_1，Δ_2为前后气盈缩分，l_1，l_2为前后定气，则有

$$(\text{前})\text{气中率}=k\cdot\frac{\Delta_1}{l_1},$$

$$\text{后气中率}=k\cdot\frac{\Delta_2}{l_2},$$

$$\text{合差}=\frac{k\Delta_1}{l_1}-\frac{k\Delta_2}{l_2},$$

$$\text{中差}=\frac{kl_1}{l_1+l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right),$$

$$\begin{aligned}\text{初末率}&=(\text{前})\text{气中率}+\text{中差}\\&=k\frac{\Delta_1}{l_1}+\frac{kl_1}{l_1+l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right),\end{aligned}$$

$$\text{日差}=\frac{2k^2}{l_1+l_2}-\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right),$$

$$\text{定率}=\text{初末率}+\frac{1}{2}\text{日差},$$

$$\text{每日盈缩分}=\text{定率}-\text{日差}。$$

设前定气后第x日的盈缩分为$f(x+k)$，则

① 《新唐书》卷三十上. 北京：中华书局，1986. 740

$$f(x+k)=f(x)+k\frac{\Delta_1}{l_1}+\frac{kl_1}{l_1+l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_1}{l_2}\right)+$$
$$+\frac{k^2}{l_1+l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right)-\frac{2k^2}{l_1+l_2}\left(\frac{\Delta_1}{l_1}-\frac{\Delta_2}{l_2}\right)。①$$

这和其前人张遂等所用公式本质上一致。

《宣明历》在计算中多次用到“同名相销(消)，异名相从”和“同名相从，异名相销(消)”的正负数加减运算法则，与《九章算术》所载者相同。

《宣明历》又首次给出“距极度五十六，余八十二分半。北极出地三十四度，余四十七分半。”“距极度”即相当于由观测点到北极的度数，与“北极出地”之和正好是一个象限：

56 度 82.5 分+34 度 47.5 分=91 度 46 分

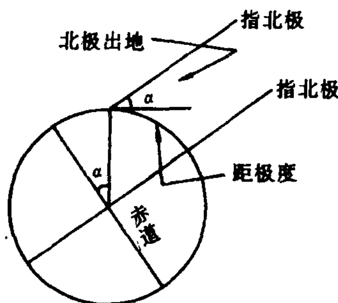


图 6.1.4

(《宣明历》规定每度 84 分)。这个关系，如图 6.1.4 所示。

根据“北极出地”度数，知观测地点是当时的首都长安(今西安市)。

① 李俨. 中算家的内插法研究. 北京：科学出版社，1957. 52～53

第二节 边冈《崇玄历》

《宣明历》于长庆二年(822 年)施行，到唐昭宗(在位 889～904 年)时已有 70 年，逐渐出现差误，于是

“诏太子少詹事边冈与司天少监胡秀林、均州司马王墀改治新历，然术一出于冈。冈用算巧，能驰骋反覆于乘除间。由是简捷、超径、等接之术兴，而经制、远大、衰序之法废矣。虽筹策便易，然皆冥于本原。其上元七曜，起赤道虚四度。景福元年，历成，赐名《崇玄(历)》。气朔、发敛、盈缩、朓朒、定朔弦望、九道月度、交会、入食限去交前后，皆《大衍(历)》之旧。”[①]

这段文字高度评价了边冈的数学才能，但同时由于大量使用数学计算，而使历法本身的法术遭到废弃，导致“冥于本原”，许多方法都是《大衍历》之旧法。实际是不公正的。

《崇玄历》修成后，于景福二年(893 年)在全国颁行。

《崇玄历》有多大篇幅，有记载说：“边冈《景福崇玄历》四十卷，[冈称处士]。”[②] 如果这记载可靠的话，那么该历是一部大部头著作[③]，但现存于《新唐书》的《崇玄历》却很少。

关于边冈的生平事迹，仅有上面提到的两条资料：一是太子少詹事，一是处士。太子少詹事，是管理东宫内外事务的正四品上的官员，地位不低。而“处士”则是指不做官的人。两种资料似有矛盾，其实是可以这样理解：边冈可能是早年为官，一步步升到正四品上。在他受召造历时，唐王朝的统治已处于风雨飘摇

---

① 《新唐书》卷三十下．北京：中华书局，1986．771

② 《新唐书》卷五十九．北京：中华书局，1986．1548

③ 在《宋史》卷二百七有边冈《唐景福崇玄历》13 卷，《崇元(玄)历经》3 卷、《崇元(玄)历立成》7 卷。

之中，社会极度混乱，他便辞官不做，隐居山林，或者因为什么事被免职，成为处士，或者是自谦的称呼。可是无论如何，边冈也是唐代末期最杰出的数学家，凭藉他的数学才能，在《崇玄历》中取得不少有创造性的成果，如关于月亮极黄纬的计算法、晷长计算法、月食食限及食分计算法、黄赤道差计算法等等。他在各种计算中，反复使用“先相减后相乘”法，这可能受曹士芜《符天历》的影响，而有所发展和推广。所谓“先相减后相乘”法相当于函数

$$y=(a-x)x$$

或它的变形，在现在混沌理论中有重要作用。

边冈的计算法体现在以下四个问题中：

月亮极黄纬的计算—

“如一象已下，为在少象；已上者，反减半交，余为入老象。皆七十三乘之，退一等。用减千三百二十四，余以乘老、少象度及余，再退为分，副之。在少象三十度已下，老象六十一度已上，皆与九十一度先相减、后相乘，五十六除，为差。若少象三十度已上，反减九十一度，及老象六十［一］度已下，皆自相乘，百五除，为差。皆以减副，百约为度，即朔望夜半月去黄道度分。”①

最后一句话是在朔、望日的夜半，月亮到黄道的度数，即月亮极黄纬。极黄纬这个名词是日本薮内清教授首次提出的②，因为中国古代无黄极极念，计算时是沿赤经圈量度的，即赤经圈上的点到黄道的度数。如图 6.1.5 中之$\overset{\frown}{RM}$，R 为月亮所在之位置，M 为黄道与赤经圈的交点。

---

① 《新唐书》卷三十下. 北京：中华书局，1986. 776

② ［日］薮日清. 中国の天文暦法. 东京：平凡社，1969. 296

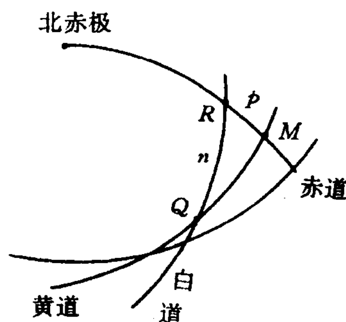


图 6.1.5

设$\overset{\frown}{RM}=p$，一象为 91 度，少象、老象为 x，即$\overset{\frown}{RQ}=x$。由所引术文，计算可分为三段：

第一段，从开始起到“副之”，相当于

$$\frac{\left(1\ 324-\frac{73}{10}x\right)x}{100} \tag{A}$$

的演算。

第二段，“副之”以后到第二个“为差”。这又分为两种情形：

当少象 $x<30$ 度，与老象 $x>61$（需以 91 度返减）时，有

$$\frac{(91-x)x}{56}; \tag{B$_1$}$$

当少象 $x>30$ 度（需以 91 度返减），与老象 $x<61$ 度时，有

$$\frac{(91-x)x}{105}。 \tag{B$_2$}$$

第三段，“皆以减副，百约为度，即朔望后夜半月去黄道度分”，即从(A)中分别减去(B_1)，(B_2)，再用 100 除之，得

$$p=\frac{\left(1\ 324-\frac{73}{10}x\right)x}{10\ 000}-\frac{(91-x)x}{5\ 600},$$

$$p=\frac{\left(1\ 324-\frac{73}{10}x\right)x}{10\ 000}-\frac{(91-x)^2}{10\ 500}。$$

每日晷长的计算——

“各计其日中入二至加时已来日数及余。如初限①已下，为后；已上，以减二至限②，余为前，副之。各以乘数③乘之，用减初、末差④。所得再乘其副，满百万为尺，不满为寸、为分。夏至前限，则退一等，皆命曰晷差。冬至前后，以减冬至中晷⑤；夏至前后，以加夏至中晷⑥，为每日阳城中晷。以次日相减，后多曰息，后少曰消。以冬、夏至午前、后约分乘之，万而一，午前息减、消加，午后息加、消减中晷，为定数也。凡冬至初日，有减无加，夏至初日，有加无减。”⑦

这是在阳城(今河南登封县告成乡)进行的测量和以此地为基准所进行的每日晷长值计算。

设 A 为“各计其日入二至加时已来日数及余”，即所求日午中与二至(设为 N)之间的时间距加日躔盈缩改正后的定日数及刻数。B 为“每日阳城中晷”，即所求日(50—N)时刻的晷长值。H 为“定数”，即校正后所得所求日 50 刻时的晷长值。计算分两步，分别求 B 和 H。按引文次序先求 B：

冬至前限、夏至后限时，

$$B=12.715\ 0-(2\ 195-15A)\cdot A^2\cdot 10^{-6}。\qquad (C)$$

---

① “初限”，指冬至前限、夏至后限，均为 59 日；夏至前限、冬至后限，均为 123.622 25 日。

② “二至限”，指冬至到夏至或由夏至到冬至的日数 182.622 25 日。

③ “乘数”，指冬至前限、夏至后限乘数 15；夏至前限、冬至后限乘数 4。

④ “初、末差”，指冬至前限、夏至后限差 2 195；夏至前限、冬至后限差 4 880。

⑤ “冬至中晷”，即冬至日中午阳城 8 尺高表的晷长，为 12.715 0 尺。

⑥ “夏至中晷”，即夏至日中午阳城 8 尺高表的晷长，为 1.478 0 尺。

⑦ 《新唐书》卷三十下．北京：中华书局，1986．774

适用于当冬至后 $A<59$ 日时和夏至后 $A>123.62225$ 日时(此时要以减 182.622 25 日入算)。

夏至前限、冬至后限时，

$$B=1.4780+(4880-4A)\cdot A^2\cdot 10^{-7}。\qquad (D)$$

适用于当冬至后 $A>59$ 日(此时要以减 182.622 25 日入算)时和夏至后 $A<123.62225$ 日时。

再求 H：

设 M 为所求日与次日中晷之差，P 为所求日午前、后的日数值，且

$$P=\frac{|50-N|}{100}。$$

又设所求日与次日间中晷长度的变化是均匀的，那么 $P\cdot M$ 就是由 B 推算 H 的改正值。这时有两种情况：

当 $N<50$ 刻时(午前)，如是在夏至后，因其晷渐长("后多日息")，则 $H=B+P\cdot M$("息加")；如是在冬至后，因其晷渐短("后少日消")，则 $H=B-P\cdot M$("消减")。

当 $N>50$ 刻时(午后)，如是在夏至后，则 $H=B-P\cdot M$("息减")；如是在冬至后，则 $H=B+P\cdot M$("消加")①。

由上述可知，H 是 A 的三次函数。如果当 $A=0,1,2,3,\cdots$ 分别代入(C)和(D)的后一项，即 $(2195-15A)\cdot A^2\cdot 10^{-6}$ 和 $(4880-4A)\cdot A^2\cdot 10^{-7}$ 中，且不计入分母 10^5 和 10^6，则得到两份三次差分表，这是一个很有趣的现象。

上列的两个表，第三阶时分别为 -9 和 -24，第四阶为 0，都是三阶差分。现在的问题是，边冈是否造过这种表？没有明确记载，但是前面提到《宋史》载有《崇元(玄)历立成》7 卷，"立

① 陈美东. 崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次差内插法的应用. 自然科学史研究，1985，4(3)：218～228

表 6.1.1　由(C)式算得的晷差(Δ_n)及各阶差分

A	Δ_n	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
0					
		218			
1	218		430		
		648		−9	
2	866		421		0
		1 069		−9	
3	1 935		412		0
		1 481		−9	
4	3 416		403		0
		1 884		−9	
5	5 300		394		…
		2 278		…	
6	7 578		…		
		…			
…	…				

表 6.1.2　由(D)算得的晷差(Δ_n)及各阶差分

A	Δ_n	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
0					
		4 876			
1	4 876		9 736		
		14 612		−24	

续表

A	Δ_n	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
2	19 488		9 712		0
		24 324		−24	
3	43 812		9 688		0
		34 012		−24	
4	77 824		9 664		0
		43 676		−24	
5	121 500		9 640		…
		53 316		…	
6	174 816		…		
		…			
…	…				

成”就是数表，即有7卷之多，其中有可能包括各种差分表，因此没有理由否定表6.1.1和表6.1.2的存在，只是后来连同其他数表一起失传罢了。

黄赤道差计算法——

“凡冬至赤道日度及约余，以减其宿全度，乃累加次缩，皆为距后积度。满限九十一度三十一分三十七小分，去之。余半已下，为初；已上，以减限，为末。皆百四十四乘之，退一等，以减千三百一十五。所得以乘初、末度，为差。又通初、末度分，与四千五百六十六先相减、后相乘，千六百九十除之，以减差，为定差，再退为分。”①

① 《新唐书》卷三十上. 北京：中华书局，1986. 772

所谓黄赤道差，在中国古代是指某时刻的赤道度 l 与相应的黄道度 a 的差，但是由于起算点是冬至而不是春分，是从冬至点沿节气的逆向量度。设 l' 为赤经，a' 为极黄经[①]，则有下面的关系（如图 6.1.6）：

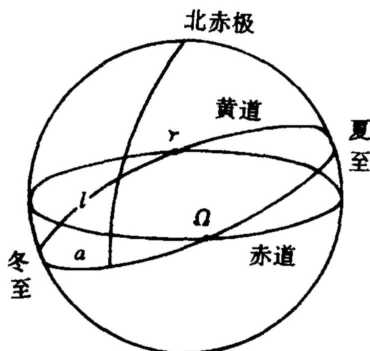


图 6.1.6

$$l+\frac{\pi}{2}=l',\quad a+\frac{\pi}{2}=a'。$$

两式相减，有

$$l-a=l'-a'。$$

由上引术文有

$$l-a=\left[\left(1\,315-\frac{144}{10}a\right)a-\frac{(4\,566-a)a}{1\,690}\right]\cdot 10^{-4}。$$

严敦杰最早整理出此公式[②]，它等于由赤经 l' 与极黄经 a' 之差 $l'-a'$ 所算得的结果。

---

① 由于中国古代没有黄极概念，因此黄纬、黄经的计算都是利用赤极，前面已使用了极黄纬概念，为对应起见此处用极黄经。

② 严敦杰."中国古代黄赤道差计算法".见：科学史集刊.北京：科学出版社，1958(1)：47～58

太阳视赤纬的计算——

“又计二至加时已来至其日昏后夜半日数及余。冬至后为息，夏至后为消。如一象已下，为初；已上，反减二至限，余为末。令自相乘，进二位，以消息法[1]除为分，副之。与五百分先相减、后相乘，千八百而一，以加副，为消息数。以象积[2]乘之，百约为分，再退为度。春分后，以加六十七度四十分；秋分后，以减百一十五度二十分，即各其日黄道去极。”[3]

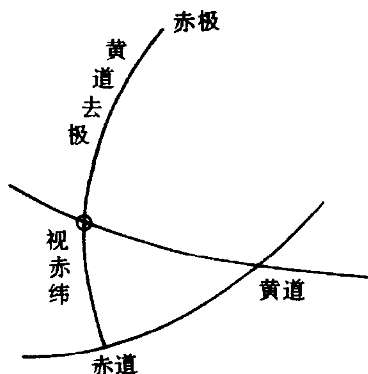


图 6.1.7

太阳视赤纬与“黄道去极”互为余弧。设 f 为黄道去极，δ 为太阳视赤纬，则 $f+\delta=91.3131$ 度，因此只要求得黄道去极 f，即可求得太阳视赤纬 δ。所以上面的引文，在“即各其日黄道去极”后，接着说：“与一象限相减，则赤道内外也”，就是太阳视赤纬。

设 x 为二至以后的太阳实际行度，则上面所引术文的前一部分(到“再退为度”)相当于下式：

① “消息法”，为 1 667.5。

② “象积”，为 480。

③ 《新唐书》卷三十下．北京：中华书局，1986．774

$$e=\left[\frac{100x^2}{1\ 667.5}+\frac{\left(500-\frac{100x^2}{1\ 667.5}\right)\left(\frac{100x^2}{1667.5}\right)}{1\ 800}\right]\cdot\frac{480}{10\ 000}。$$

经整理，可改写为

$$e=\frac{184}{50\ 025}x^2-\frac{16}{50\ 025\times 3\ 335}x^4。$$

这是一个缺项的四次函数。式中的 $x\leqslant 91.313\ 1$；若 $x>91.313\ 1$，则需以 182.626 2 返减。

术文的后一部分，相当于：

对于春分后的时日(当日夜半时)：

$f=67.40+e$。

对于秋分后的时日(当日夜半时)：

$f=115.20-e$。

由于求得了 f，则有

$$\delta=23.913\ 1-e$$

$$\delta=e-23.885\ 9。$$

对边冈的“先相减后相乘”法早已有人注意到，日本三上义夫认为是招差法的二次差[1]，严敦杰说是“当指内插法”[2]，李俨则认为边冈的“先相减后相乘”是内插法的“专名”[3]。陈美东把边冈在计算黄赤道差时所使用的“先相减后相乘”计算步骤与等间距二次内插法公式相对照，得出结论说“先相减后相乘法”“应是等间距二次差内插法的一种表达形式”[4]。

根据上述的事实可知，边冈把等间距二次内插法改变为更简

---

① [日]三上义夫. 林科棠译. 中国算学之特色. 见：万有文库本. 再版. 上海：商务印书馆，1934. 70

② 严敦杰. 中算家的招差术. 数学通报，1955(1)：4～13

③ 李俨. 中算家的内插法研究. 北京：科学出版社，1957. 53～54

④ 陈美东. 崇玄、仪天、崇天三历晷长计算法及三次内插法的应用. 自然科学史研究，1985，4(3)：218～228

捷的计算步骤，并熟练地运用，说明他有雄厚的数学基础、扎实的功底。边冈无疑是当时最高水平的最杰出的数学家。陈美东在讨论了边冈关于太阳视赤纬公式计算之后指出：从数学史上看，它应是出现最早的、在天文历法中得到具体应用的第一个四次函数式，从内插法的角度看，其实质乃是五次差等于零的四次差内插算式。从天文学角度来看，边冈探索到能更好地表达太阳视赤纬真实变化状况的函数式。因此，“边冈公式在数学和天文学上都具有十分重要的意义。”① 边冈在数学史上应占有一定的地位。

第三节 五代历法中的数学

边冈《崇玄历》于景福二年(893 年)颁行后不久，唐王朝便于 907 年灭亡，由朱温(852～912)在汴梁建立梁朝，史称后梁，接着有后唐、后晋、后汉、后周建立，合称五代，赵匡胤(927～976)于 960 年灭后周，成立宋朝，即北宋。五代时期及其前后，全国还有许多政权并立，北方有契丹族于 907 年建立的契丹国，947 年改称大辽，此外还有前蜀、吴越、南汉、后蜀、南唐等等。

五代时期的政权，存在的时间都很短(后汉只有三年多)，整天忙于战争，无暇顾及历法研究与改革，一直使用边冈的《崇玄历》，到后晋才开始改历。后晋由石敬瑭(892～942)于 936 年建立，由马重绩造新历。

马重绩，字洞微，“其先出于北狄，而世事军中”，可见他是北方某少数民族后裔。又“重绩少学数术，明太一、五纪、八象、《三统大历》，居于太原。”他先在后唐工作，任大理司直，不久被免去。因此他又去伴随石敬瑭，做占筮工作，石于 936 年打败后

① 陈美东. 中国古代太阳视赤纬计算法. 自然科学史研究，1987，6(3)：213～223

唐，建立后晋。马重绩被任命为太子右赞善大夫，迁司天监，负责天文历法研究和颁历工作。

马重绩于天福三年(938年)完成一部新历法，奉表进呈石敬瑭，表云：

“臣闻为国者，正一气之元，宣万邦之命，爰资历以立章程。长庆《宣明(历)》，虽气朔不渝，即星躔罕验；景福《崇玄(历)》，纵五历甚正，而年差一日。今以《宣明》气朔，《崇玄》星纬，二历相参，方得符合。自古诸历，皆以天正十一月为岁首，循太古甲子为上元，积岁弥多，差阔至甚。臣改法定元，创为新历一部二十一卷，七章上下经二卷，算草八卷，立成十二卷，取唐天宝十四载乙未，立为近元，以雨水正月朔为岁首。谨诣阁门上进。”①

石敬瑭命司天少监赵仁锜等6人，以新历法与《宣明历》、《崇玄历》进行考核得失，通过，赐名为《调元历》，颁行。

《调元历》是一部内容丰富的历法，其中改革颇多。但是早已失传，不可能有进一步了解。从记载来看，它是在《宣明历》和《崇玄历》基础上，取二者之长处而编成的，特别是如上节所述，《崇玄历》使用了大量数学，而且有很高水平，又有《崇玄历立成》7卷，不能不对马重绩产生影响。马重绩有《算草》8卷和《立成》12卷，前者无疑是计算历法时的演算记录，而后者则是历法中用到的数表，两者合起来达20卷之多。张遂主编的《大衍历》有《立成》12卷，而无算草。推想这20卷中肯定包括唐代历法中普遍使用的插值法和等间距二次内插法的另一种形式“先相减后相乘”法，以及各种差分表。看来，他是在数学计算方面下了一番功夫的，数学水平不会低。

马重绩对漏刻制度也进行了研究，他认为古人所用的100刻

① 《旧五代史》卷一百四十. 北京：中华书局，1976. 1862

是“以中星考昼夜”而定的，就是同一颗恒星相邻两次上中天的时间为一昼夜。一昼夜又分为12时，每个时辰相当于8刻60分刻之21，又以4刻10分为正。可是，后来改为“以午正为时始”，于是使时间向未时下侵4刻10分而为午，也就是说向后推迟了半个时辰(相当于现在1个小时)，因此“昼夜昏晓，皆失其正”，请求恢复原来的制度，得到批准。

马重绩的生卒年不见记载，只有“重绩卒年六十四”[①]。估计卒于942年前后。

马重绩《调元历》颁行至后周初，955年周世宗柴荣(921～959)即位，注意“内修法度”，于是在显德二年(956年)诏王朴修撰新法。

王朴(906～959年)，字文伯，东平(今山东东平县)人。少举进士，为校书郎，“为人明敏多材智，非独当世之务，至于阴阳律历之法，莫不通焉。”[②]后周初为端明殿学士、左散骑常侍。他受命后，积极进行工作，“乃削去近世符天流俗不经之学，设通、经、统三法，以岁轨离交朔望周变率策之数，岁日月五星”，[③]经过一年多，成《钦天历》15卷，其中《历经》1卷、《历》11卷、《草》3卷，还有《显德三年七政细行历》1卷。

王朴批评了“等接”之法，说是“盖从假用，以求捷径”，这大概是针对边冈说的，因为边冈用过“等接”之术等。推测王朴有可能对边冈的精采数学计算未能真正理解。

王朴的《钦天历》也早已失传，只留下很简略的一部分。他设了“三法”，在计算中起着重要作用。“三法”是三个常数，它们是“通法”100，“经法”72和“统法”7 200。王朴对“三法”

① 《旧五代史》卷九十六“马重绩”. 北京：中华书局，1976. 1281

② 《新五代史》卷三十一“王朴”. 北京：中华书局，1986. 343

③ 《新五代史》卷三十一“王朴”. 北京：中华书局，1986. 343

有自己的解释，他认为阴阳各有数，阳之策 36，阴之策 24，“两阴三阴，同得七十二”，即 $2\times 36=72$，$3\times 24=72$，这是“无所不通”的数，所以把 72 做为“经法”。100 为“数之节，随法进退，不失旧位”，所以叫“通法”。$100\times 72=7\ 200$，即“以通法进经法，得七千二百，谓之统法”①。实际上，“三法”没有任何天文历法意义。可是 72 这个数也有优点，即它的因数多：$72=2^3\cdot 3^2$。

在保留下来的《钦天历》中，计算都比较简单，有的也用到了“先相减后相乘”法。下面举几个例子②。

求“中节”——

“置岁率，以演纪上元至所求年乘之，为积气。统法而一，为日。盈周纪去之，命甲子算外，即天正中气日辰及分秒也。以气策累加之，秒盈通法从分，分盈统法从日，日盈周纪去之，即各得次气日辰及分秒也。”

其中“以演纪上元至所求年”即上元积年，设为 m，岁率为 n，统法为 l，周纪为 s，积气为 r，气策为 t（一个平气的时间长度），“天正中气日辰及分秒”（即本节气的时刻）为 v，“各得次气日辰及分秒”（即以后各节气日的时刻）为 u，日为 F，则有

$$r=nm, \tag{1}$$

$$r=r/l, \tag{2}$$

$$v=F-ps。 \tag{3}$$

p 是使 v 为最小正数的非负整数。

$$u'=v+qt,$$

其中 t 为非负整数。当 $t=1$，2，…时，若 $u'>F$，则

$$u=u'-p_1s, \tag{4}$$

其中 p_1 是使 u 为最小正数的非负整数。

---

① 《新五代史》卷五十八”司天考第一”，北京：中华书局．1986．671

② 《新五代史》卷五十八“司天考第一”．北京：中华书局．1986．676～703

上面的(3)，(4)二式相当于求两个同余式的最小解，即解

$$u \equiv F(\text{mod } p) \qquad u \equiv u'(\text{mod } p_1)。$$

求“九服中晷”——

“置距轨数，二十五乘之，一百三十七除，为天用分。置之，以二十二乘，六约之，用减四千，为晷法。又以天用分自乘，如晷法而一，为地用分。相从为晷分，分十为寸，即得其地中晷也。”这是已知“距轨数”、阳城八尺表午正晷长为基准推算同一日同一子午线上不同地点的晷长的问题。即所谓“其地中晷”。

设“距轨数”为M，天用分为A，地用分为B，晷法为W，晷分为T，“其地中晷”为C，则由术文有

$$A=\frac{25M}{137},$$

$$W=4\ 000-\frac{22A}{6},$$

$$B=\frac{A^2}{W},$$

$$T=A+B=\frac{25M}{137}+\frac{A^2}{W},$$

$$C=T/10=\left(\frac{25M}{137}+\frac{A^2}{W}\right)/10。$$

实际上，这是一个以M为自变量的函数，但M也要求出，这里略去。

求“月去黄道度”——

“置入交定日，交中以下，月行阳道；以上去之，月行阴道：皆以经法通之。用减九百八十，余以乘之，五百五十六而一，为分；满经法为度。行阳道，在黄道外；行阴道，在黄道内，即所求月去黄道内外度也。”

这是已知“(月)入交定日”(即所求时日与月所过黄白升交点时日之间的时距，设为m)，求月到黄道的距度(P)。但是已知条件是时

距，因此在计算过程中必须把时距变为度才行。由术文有

$$P=\frac{72(980-72m)m}{72\times 556}。$$

术文中“交中”为 13.606 1 日。若 $m<13.6061$ 日，则直接入算；若 $m>13.6061$，则以 $m-13.6061$ 日入算。

不再列举。

第二章　民间数学与边疆数学

第一节　中原数学著作

晚唐五代期间，虽然连年战争不断，但还是有少数人对数学感兴趣，并且写了一些著作。由唐末到北宋初(中间跨五代)，留下了约20个书名，其中有哪些是北宋初(即不属于本卷的时限)的不十分清楚，下列书名多数应属五代末以前：

谢察微《发蒙算经》3卷；

陈从运《一得算经》7卷；

《三问田算术》1卷；

江本《一位算法》2卷；

徐仁美《增成玄一算经》3卷；

鲁靖《新集五曹时要［算］术》3卷；

《五曹乘除见一捷例算法》1卷；

夏翰《新重演义海岛算经》1卷；

程柔《五曹算经求一法》3卷；

张祚注《法算三平化零歌》1卷［龙受益法］；

王守忠《求一术歌》1卷；

任弘济《一位算法问答》1卷；

杨楷《明微算法》1卷；

《法算机要赋》1卷；

《法算口诀》1卷；

《算法秘诀》1卷；

《算术玄要》1卷；

《算范要诀》2 卷；

《明算指掌》3 卷；

《求一算术》1 卷[①]。

这些著作都已失传，只有少数留下一点点内容的说明，仅《发蒙算经》有少量佚文。

从书名可以初步看出，这些都是实用型的简算法，且水平不会太高。通过下面介绍的资料即可证实这种看法。

一　谢察微《发蒙算经》

谢察微是何时代人有不同观点，《宋史》载有“谢察微《发蒙算经》三卷”，又有“谢察微《算经》三卷”，两个书名应是同一本书，这是根据宋代图书馆藏书目著录的，同时著录的还有大量唐代及以前的著作。在《新唐书》上也有“谢察微《算经》三卷”，说明该书是在唐代著成的。根据一些另外的资料，进行分析的结果，认为谢察微应是五代后期人，可能活到北宋初[②]。他的著作全名是《发蒙算经》，可是在登记著录时便简化成《谢察微算经》。在宋以后的记载中，均称简化了的名称。

《发蒙算经》何时失传，目前尚难说清，在宋元时肯定存在。王应麟(1223～1296)。记有“《谢察微算术》二卷，设为乘除法，凡一百六事。”这《谢察微算术》二卷，无疑即《谢察微算经》三卷之误，其内容是讲乘除法，共有 106 向。又有“《谢察微算经》三卷”，下有注称：“《御览》引《谢察微算经》曰：‘易称大(太)极是生两仪，盖数之先也。自隶首作术(数)，察(容)成造历，

---

① 《新唐书》卷五十九“艺文三”. 北京：中华书局，1986. 1548；《宋史》卷二〇七“艺文六”. 北京：中华书局. 1977. 5271～5276

② 李迪，冯立升.《谢察微算经》试探. 见：《数学史研究文集》第三辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1992. 58～65

题算斯兴，一位算法按《孙子算经》”[①]。此处所引内容可能属于《谢察微算经》的自序部分，能看出大概眉目。可是到元代后期也只剩很少一些佚文，在明代初期编辑的《说郛》中收有“宋《谢察微算经》”，包括大数、小数、度、量、衡、亩、九章名义、用字例义等八项，其中最重要的是最后一项，现录如下：

“法，样数也[②]。实，本数也。因，法之单位者又由也。归，入己之数也。加，增添也。减，除少也。乘，法之多位者。归，先归后除命名也。除，减少也。积，乘成之数也。乘，法实合变数也。如，九数用此下一位也。身，本位也。则，法也。左，上边大位也。右，下边小位也。纵，直长也。横，广阔也。广，横阔也。阔，横广也。直，长也。面，方面也。高，立起也。深，陷下也。倍，加上本数也。并，二数相合。截，割断也。分，拨开也。原，初数也。差，多少不同数也。通，会同其数。变，改变其数。约，量度也。中，算盘之中。进，移上前一位。逢，遇有数而言逢。上，脊梁之上，又位之左。下，脊梁之下，又位之右。挨，随身变数也。退，移下后一位。勾，阔也。股，长也。斜，两隅相去又不正也。弦，勾股斜曰弦，弧矢亦有弦。隅，曲角也。长，直也。周，外围也。较，相减余也。廉，方直也。方，四面同数。径，周中之弦。脊，盘中横梁隔木。列位，各置位次。折半，减去一半。还原，复旧数也。商除，心与意商而除之也。相乘，长宽或银货也。自乘，法实同数相乘。再乘，自乘之而又乘。遍乘，先以一法遍乘诸数。商总，合用商开之法于盘中。开方，自乘还原也。开立，即自乘再自乘之还原。中实，即商总也。率，如一二三四五并得十五数也。得令，斤两贯个石等类也。得术，乃法首位每下该得之名。互乘，如四处数目上下斜角相乘。相减，如

① ［宋］王应麟．《玉海》卷四十四．上海：上海书店影印本，822～823

② 原文“法”大号字，“样数也”为双行小字，现为排版方便，用大号字。下同。

二数以少减多，余曰较。合得，算数定夺。维乘，四处颠倒相乘。若干，一为数始，十为数终，未算难定。几何，与若干相间。”①

以上共73条术语和简短解释与说明，有相当一部分具有定义性质，其中有些较为精彩，如“积，乘成之数也”，“身，本位也”，“自乘，法实同数相乘”（按：实为被乘数，法为乘数），“再乘，自乘之而又乘”，“较，相减余也”，“开方，自乘还原也”，“还原，复旧数也”，“倍，加上本数也”等等。有的术语相同，而意义不同，如“归”，“弦”等都是。还有一些，从定义的逻辑原则来看，是循环的，如“直，长也”和“长，直也”这一对术语“直”与“长”互相定义，最终是都无法说明其涵义。

在上列术语中有一类颇为重要，因为它们反映的是算法及工具问题。其中一些如下：

“左，上边大位也，

右，下边小位也。

中，算盘之中，

上，脊梁之上，又位之左，

下，脊梁之下，又位之右，

脊，盘中横梁隔木，

商总，合用商开之法于盘中，

中实，即商总也。

进，移上前一位，

退，移下后一位。

列位，各置位次。”

明显地是有关算法的操作和计算工具——算盘。前二条和后三条是属于布算和进位、退位问题，“列位”分上、下、左、右，左和上为大位，右和下为小位，而进退位又有“上前”和“下后”，应

① 《说郛》弓一〇八。

分别为大位和小位。可见左、上、前是一致的，都是指大位(高位)；右、下、后是一致的，都是指小位(低位)。只是因叙述的需要而变通用字的结果。左大右小的数字排列，如传统的筹算和改为用笔写筹码都是这样。

中间的六条都与“算盘”有关，“中，算盘之中”这可能是指整个算盘的里边，其中间有“脊”，为一横梁隔木，脊的上边为“上”，下边为“下”，这是说位置，似与数的大位、小位无关，但是还有另外的涵义，即上为“位之左”，下为“位之右”，与上述五条的“列位”等相合。

现在的问题是：谢察微所说的算盘是什么样的计算工具呢？

前面所引“用字例义”73条中，既未提到“珠”字，也未提到“筹”字。可是中国历史上有无筹算盘，迄今没有找到一条肯定“有”的资料，而且即使有筹算盘，也不可能在中间有横梁隔木，因此理解成珠算盘更有道理。本书第三卷，曾讨论了东汉末徐岳《数术记遗》中有“珠算”一项，近来研究者给出了一幅推想图。推想该珠算有珠，分黑白二色，一黑五白穿在一个档上，上一黑当五，下一白当一，每档相当于“10”，由右到左为低位到高位，但是没有档。这书有甄鸾注本，唐代在明算科中做为“帖读”(可理解为非正式教科书)，流传较广；五代时社会上可能有多种抄本，谢察微不能见不到。他学习了徐岳的珠算，在中间加了横梁隔木，就成了改进的珠算盘。这珠算盘，上一珠下五珠，因有横梁隔木，不需要再以黑白区分。可是从“用字例义”的叙述来看，珠算盘也许在谢察微之前已经有了，五代时流行于民间，撰写《发蒙算经》时做为普通数学内容写进书中，而保存下来的仅是“用字例义”中的几条“用字”而已。

在现传本《张邱建算经》卷下“百鸡”问题之后有这样一段话：“此术若依上术推算，难以通晓。然较之诸本并同，疑其从来脱漏阙文。盖流传既久，无可考证。自汉、唐以来，虽甄鸾、李

淳风注释，未见详辩。今将算学教授并[①] 谢察微拟立术草，创新添入。”所添入的有术文一条，其下有“草”三条，都是给术文作的。钱宝琮认为“谢察微的解题方法显然是不合理的。”[②] 我们同意这一看法，因此不进行讨论。这条资料是宋代人加进书中的，从而也证明谢察微的年代较早。

根据上述情况，可初步推知，《发蒙算经》三卷，现存的佚文仅相当于卷一的开头部分，而关于“创新”的术、草应在卷二或卷三，因为它尽管在解法上不合理，可问题本身还是较深的。

二　陈从运《一得算经》

陈从运的年代无明确记载，从一点零星资料来看，应是唐末人。他的著作《一得算经》在宋代尚存，有记载说：“唐试右千牛卫、胄曹参军陈从运著《得一算经》，其术因折而成，取损益之道，且变而通之，皆合于数。”[③] 由此知陈从运是皇宫中侍卫皇帝的低级武官，只有从八品上。他的著作《得一算经》主要讲述“因”、“折”、“损”、“益”等简算法。

三　徐仁美《增成玄一算经》

徐仁美可能是比陈从运稍晚的唐末数学家，上面同一文献在介绍了陈从运之后接着说：“复有徐仁美者，作《增成玄一法》，设九十三问，以立新术，大则测天地，细则极于微妙，虽粗述其事，亦适用于时。”[④] 可见这书包括 93 道问题，其中有关天文和大地测量等问题，而《增成玄一法》应即《增成玄一算经》一书。

---

① “并”字，钱宝琮认为是衍文，删去。

② 钱宝琮．张邱建算经提要，见：钱宝琮．校点《算经十书》下册．北京：中华书局，1963．327

③ 《宋史》卷六十八“律历志一”，北京：中华书局，1977，1493

④ 《宋史》卷六十八“律历志一”，北京：中华书局，1977，1493

四 江本《一位算法》

《一位算法》2卷，《新唐书·艺文志》已著录，大约应是唐代晚期和五代时的著作。13世纪的王应麟(1223～1296)似曾见过此书，他记载说："江本撰《三位乘除一位算法》三卷，又以一位因、折、进、退，作《一位算法》九篇，颇为简约。"[①] 这里讲的是两本著作，它们的名称虽然都叫《一位算法》，但是本质上有区别，前者应是"三位乘除"转化为"一位算法"，后者则是"一位"，不需转化。《新唐书》记的是二卷，与这里所说的二书都不同，无法说清。

上述的这些书，基本上都是实用型的，其内容除少数部分外大都是简算法。此种思想，早在《夏侯阳算经》就有了这种苗头，唐代继续发展，如贞元(785～805)时的龙受益(又有记作龙受)著有《算法》2卷、《求一算术化零歌》1卷、《新易一法算范九例要决》1卷[②]，前面所引的张祚注《法算三平化零歌》1卷，注的是"龙受益法"。可见，龙受益是唐代中期研究简算法的数学家。以研究简算法为一种倾向，持续了八百多年，到南宋末杨辉的工作达到了顶峰，就在这前后又出现了诗歌和口诀，并逐渐代替了简算法研究。宋元时代高水平的数学发展，只有短短的二三百年与之并存。本节所讨论的唐末五代，正是简算法盛行的时期，高水平数学著作还要过一百多年才出现。

---

① 李俨. 中国古代数学史料. 上海：中国科学图书仪器公司，1954. 178

② 《宋史》卷二〇七"艺文六". 北京：中华书局，1977. 5275. 第一种又见《新唐书》卷五十九"艺文三". 北京：中华书局，1986. 1548

第二节　少数民族数学资料

——纳西族东巴经中的数学

纳西族是居住在南方云南一带的少数民族，其历史悠久，并有自己的独特文化。其中有代表性的是“东巴经”，用一种特殊的象形文字书经文，是纳西族比较普遍信仰的“东巴教”的典籍，流传至今的有万余种。东巴文有二千多个，所表达的内容多与自然现象或自然物有关。纳西族象形文字的创始年代，目前尚无定论，一般认为形成于唐代或更早，至迟在宋代已用于写经①。

在东巴经中载有不少与数学有关的资料，主要是数字符号与记数法。它采用 7 个符号如下

个　十　百　千　万　亿　兆

以堆垒式可给出任意一个多少兆以下的数目。如个位数，为

1　2　3　4　5　6　7　8　9

不超过 100 的数的记法举例：

① 赵慧芝．纳西象形文字中的科学知识初探．自然科学史研究，1995，14(2)：102～114

× 11 　　12

25 　　40 　　62 　　86 　　97

100 以上的数目写法举例：

360 　　532 　　1500 　　2623 　　4068

16 000 　　33 420 　　2 亿 　　13 亿

由以上的例子可以看出：不超过 10 000 的数目全用堆垒式，由高位到低位可写出任何一个数目，几个百就写几个“+”，虽然麻烦一些，但书写并不困难。可是万、亿等写法有所改变，似乎是做为单位看待，在它们的上面加上万以下的数目，如“1111”（4 万）等等。万、亿上下又都是堆垒式写法。

在另外的资料中，纳西族数目也有稍微不同的写法，特别是把 10 写作“+”而不是“×”，1 写做“丨”而不是“1”，在排列上同样有变化。现举例如下：

12　　90　　70

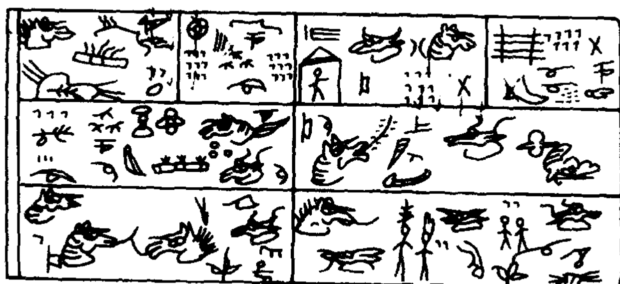


图 6.2.1　采自《超度·献冥马》①

12　　13　　14　　25　　33

②　68　　80　　90

① 《纳西东巴古籍译注(二)·超度·献冥马》. 昆明：云南民族出版社，1987

②《纳西东巴古籍译注(二)·刺母孟士》. 昆明：云南民族出版社，1987

在同一文献中有“ ||| ||| ||| 十”，中间稍分开一点，被译作“九”(9)和“ᚋ”(10)。在另一处，又把“ᚋ”译作“百”。

根据上述情况来看，纳西族所用的是十进制系统，有一套自己的记数符号。但是使人感到有些混乱，如上面列出 90，有的十位在上，有的十位在下，而且同一书中把“ᚋ”既译成“10”，又译作“100”。是原文如此，还是译者写错？因为我们未看到原件，只能根据译文来了解。不过，不管怎么说，这是我国南方少数民族纳西族早期在记数符号方面的创造，是很珍贵的文献。

第七编

敦煌数学

敦煌学已是举世瞩目的学问，敦煌学中应包含敦煌数学，敦煌莫高窟及其藏经洞经卷抄本起迄时间大致与本卷所论：上自西晋下迄五代相符，所以敦煌数学在本卷独立成编比较适当。

第一章　莫高窟及其藏经洞

敦煌在甘肃省西部，东经 95°，北纬 40°处。城南 5 里有鸣沙山(图 7.1.1)。敦煌地处当年阳关大道咽喉，是从内地到新疆、到印度、到波斯、到罗马、丝绸之路的重要门户，是中西文化交流的枢纽。南方晋时北方为前秦，苻坚建元二年(366 年)乐僔和尚在鸣沙山基(三危山)开凿第一个佛教石窟，称莫高窟(图 7.1.2)。从此历经南北朝、隋唐、五代、宋、金、元渐次增建1000 余窟，大小规模、深浅不一，有高达 36 米者，而窟中都施彩画、彩塑，屡废屡兴。至今有壁画、塑像的石窟共约 500 处，南北绵延 1 618 米，上下三四层，总称莫高窟群；或简称莫高窟。

这一举世珍贵宝藏在我国西北边陲沉睡 1 500 年，早已被人

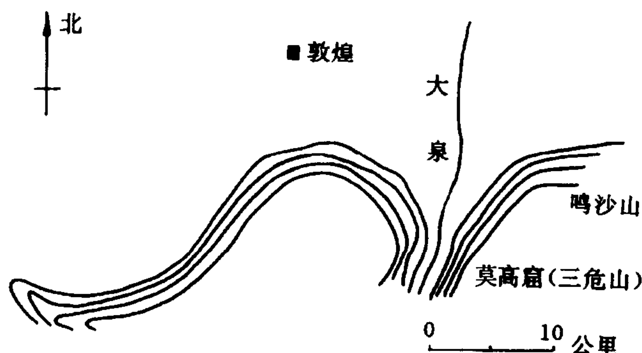


图 7. 1. 1

遗忘，即使《敦煌县志》也无著录[①]。19 世纪西方人士开始来我国腹地旅行，稀世之珍渐为人知，并渐传开。清光绪二十六年(1901年)，适是 20 世纪第一春，阴历四月二十八日，守窟道士王圆箓(? ～1931)无意中发现一秘室，内藏经卷、幡画、刺绣品、铜像等文物数万件。惊喜之余，取出少数，仍把秘室封闭。少数经卷等藏品作为回报施主的礼品，但从此秘室藏宝消息不胫而走。六年后(1907 年)英人斯坦因(Stein A,1862～1943)买通师爷蒋资生与王道士周旋，盗去宝藏。装车 24 箱，雇用骆驼 40 头，日夜兼程，翻越葱岭到印度，专设西域图书馆展览，后所有展品归英国伦敦不列颠博物馆。翌年法人伯希和(Pelliot P,1874～1948)。1911 年，日人桔瑞超，后来俄人鄂登堡等又来宝地劫掠。伯希和察知王圆箓不识字，他专要卷中之有年月、署名、题记者，劫走 6000 卷今藏巴黎国家图书馆。伯希和还在各洞窟用蒙头照相机盗照壁画、塑像、洞景数百幅，后用珂罗版印刷，函装六大盒。伯希和又与罗振玉接触，说秘室中还有劫余经卷，后归京师大学堂。

① 清道光十一年(1811 年)知县苏履吉修《敦煌县志》。卷一有敦煌石窟图，仅示意而已，无文字记载。

这数万卷经卷经后人清点，知是用古汉语、藏、回鹘、龟兹、和田、康居等各种文字书写品和木版印刷品，内容为佛教道教经典、文书，儒家论著、小说、地理、诗歌、词曲、契约、帐单、状牒、星象、医药及其他科技、军事等文献。

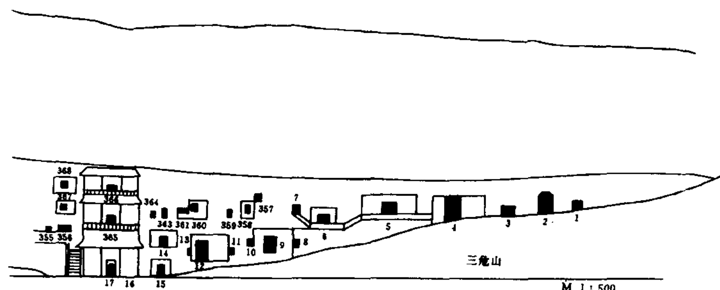


图 7.1.2

这一秘室藏品为何人、何时所藏？据可靠推测当是北宋景祐二年(1035 年)时西夏王李元昊占瓜、沙、肃三州，中原人南迁，敦煌佛窟封闭，僧徒四散。当时是有准备撤离的，把不能带走的，所有经卷、文书、法器等都密闭在复室中，外面用泥墙砌死，还绘上壁画，外面不露丝毫痕迹。战争状态结束，佛寺重兴，原来的僧人不曾回寺，这个秘室绝无人知几达 1000 纪，所以今存秘室经卷断为公元 5 世纪至 11 世纪时物。

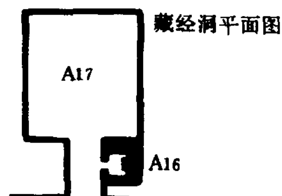


图 7.1.3

莫高窟石窟群(图7.1.2),法人伯希和曾为编号,我国画家张大千也曾为编号。建国后敦煌文物研究所重为编号以A为首。发现经卷等宝藏的石窟乃A17窟中的耳室A16窟(图7.1.3),至今经卷已星散各地,窟内壁画塑像完好,洞口有唐大中五年(851年)碑。唐代壁画傍树女供养人犹存,有经去洞空之感慨。

莫高窟石窟群今属敦煌研究院所属。今存壁画如折为5米宽长卷,长可达25 000米,彩塑泥像2 414身。

莫高窟石窟群本身、壁画、塑像和A16窟秘室所属经卷等是国家重点文物,且已列入联合国人类文化遗产,是敦煌学研究的具体对象。这稀世之珍至今仍具有非凡的魅力,我们只能引许久年之前两段游记,以补充描绘当时石窟质朴形象[①]。

“莫高窟这个小小的绿洲就深藏在这片坡地里,它隐蔽得如此之妙,以致到了跟前,还不知道它在哪里。这片坡地自古以来被两山间流出的大泉冲开一道深而且广的河床。河床的东岸是起伏不平的沙丘,西岸是陡立如削的崖壁,莫高窟孔就开凿在这里。人在窟顶平广的砂坡上看不见也不会想到下面的情景,只消从一个陡坡忽转直上,莫高窟就展现在眼前。莫高窟的景象是十分引人入胜的。那股所谓大泉现在还剩下一支细流,清彻如镜。它从石窟南方约二里的地方钻出砂面,曲曲折折流过莫高窟,就又潜入砂碛中去了。这股流水,好像是为莫高窟而存在的。崖下则是浓绿成荫,流泉迂回。分布在灰色崖壁上的石窟群错落有致、掩映在绿树丛中。”

“当我们经过长途沙漠旅行,终于到达了莫高窟这个小小的绿洲。面对着彩画缤纷、彩塑璀璨的窟群,像是各色宝石镶嵌在岩壁上的艺术圣殿。我们心情振奋,忘记了旅途的劳顿,迫不及待地走进这些圣殿中去。即使攀登到那些无路可通、处于高层危崖

① 游记作于兰新铁路通车之前,第二篇引自半个世纪前潘絜兹教授手笔。



图 7. 1. 4

之上的洞窟，也忘记了危险，一进入洞窟，我们就被这些艺术作品迷住了：甬道、佛龛、四壁、窟顶都是彩画，她绚烂富丽、庄严肃穆，她充满宗教的神秘、又富有现实生活的气息，我们正如处于一个奇异的世界，感到惊奇、迷惘和快乐。在这些高高低低的石窟中穿行，我们心夺目迷，沉没在艺术的海洋中无所措手。这感受是每个初到莫高窟的人都是相同的。”

一个世纪以来A16秘室所藏经卷流散各地，经最近统计在数量上为：

中国：北京图书馆近1万卷，编号1～9871；台北中央图书馆144卷；上海文管会约100卷；敦煌研究院若干卷。

英国不列颠博物馆7 000余卷，编号：S1～7599。

法国巴黎图书馆约6 000卷，编号：P1～5579.

俄罗斯圣彼得堡俄罗斯科学院东方研究所约3 000卷，编号：孟1～2953。

美国纽约大都会博物馆约2 000卷。

日本大谷大学34卷，龙谷大学7卷，私人收藏613卷。

印度新德里图书馆藏少量。

合共约3万卷。这些经卷逐渐以摄影方式传播全世界。1982年台湾省黄永武在新文丰出版社出版《敦煌宝藏》173巨册影印全部英藏、法藏经卷，读者查阅称便，但以缩版仍小，文字图画有时难免模糊不清。90年代以来此种复印工作已进一步展开：四川人民出版社率先与伦敦大学亚非学院、中国科学院历史研究所合作，于1990年出版《英藏敦煌文献》(汉文佛经以外部分)第1卷。上海古籍出版社与俄罗斯科学院东方研究所圣彼得堡分所合作于1992年出版《俄藏敦煌文献》第1卷。上海古籍出版社又与法国国家图书馆合作于1995年出版《法藏敦煌西域文献》第1卷。缩版较台湾新文丰版加倍，印刷质量佳胜，便于判读，为敦煌学者带来很大方便；但售价每卷在一二千元左右。杭州大学敦煌学研

究中心已确定课题：分经史子集校点全部经卷并作注释。此项工程完成后，敦煌学研究将登上新台阶。

第二章　莫高窟壁画中的数学

莫高窟壁画不但是极为珍贵的艺术宝库，它也是数学历史发

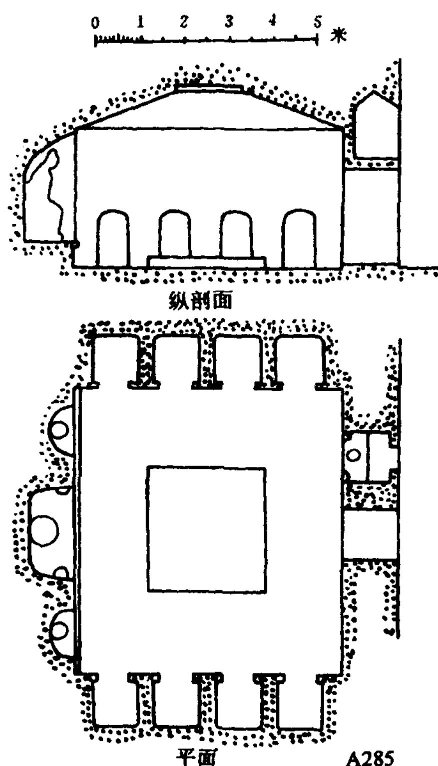


图 7.2.1

展重要文献。窟群每一石窟从纵深方向在崖壁开凿后，匠师就修整

成大体为长方形空间，我们以A285窟取作典型(图7.2.1)。图中下为平面图，上为纵剖截面。从洞口入内，左右壁各有四佛龛，中央有主龛，两侧各有胁侍菩萨，其窟顶凿成方台形。佛龛中都伫立彩塑佛像，石窟中央佛坛(正方形)也立佛像。佛龛内及余下四壁全部施绘彩色绘画。窟顶一般有外方内圆图案画，称为藻井，窟中主佛，本尊菩萨，背壁有圆图案画，称为项光。四壁、甬道彩色绘画、藻井和项光总称壁画。壁画中的几何作图和投影制图在往时匠师们有如此业绩，特别要在高空、大面积上有时还要仰天制图，令人赞叹不已。

第一节 几何作图

我们选一些藻井和项光的代表作试作分析（图7.2.2～7.2.4)。

图7.2.2为A367藻井，全图由同心正方形构成，中央绘团凤，渐次以回纹、方胜、卷草等图案描绘。全图祥和明快，令人赏心悦目。

图版5系A428藻井。正中央是四个同心圆。外接正方形。再外是八角形。再外、又重复一遍。作者还巧妙地把四个同心圆按全图32等分作放射线，形成内外三重32瓣莲花——佛教教徽。在直线形几何图形空间又绘出卷草、舞伎，就进一步显示出迷人的魅力。

图版6系A407藻井。内外各圆三层、方三层。中央圆内画着三只奔免，它们合共三只耳朵，合成一个正三角形。从此8等分圆周形成两道八瓣莲花。在方圆之交画家又以生花妙笔细腻地画出各式舞姿的八位飞天，难免使人不得不“心夺目迷、无所措手”了。

图版7系A329藻井，原大170厘米见方，外周以正方形为基



图 7.2.2

调，中央以圆为图案基调，这幅作品画家以圆周 14 等分放射作出三重14 瓣莲花。方圆之交又穿插四位飞天往来翱翔，设计可谓周到。

图版 8 系 A444 窟本尊菩萨背壁项光，原大直径 65 厘米，内外有七层同心圆环，中央是八瓣莲花。画师彩绘精细、着色鲜艳，是在脚手架上凌空作成，真是叹为观止了。

显然上面各种图画其线条、方、圆都是用作图工具——规、矩、和界尺[①] 作出。画师们怎样等分圆周？怎样等分一角等几何作图问题是值得探讨的问题。

---

① 沈康身. 界画、《视学》和透视学. 见：科技史文集. 上海，1982. 159～176

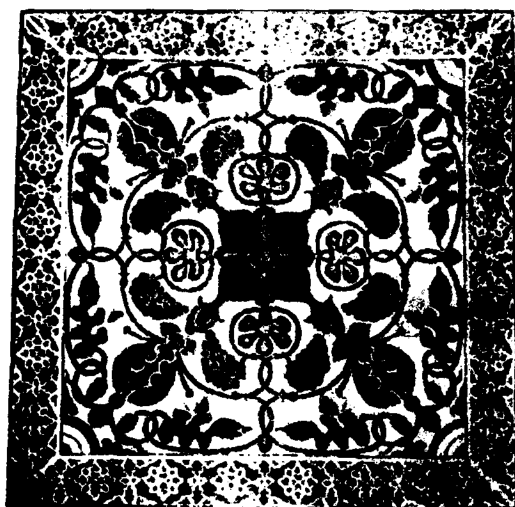


图 7.2.3

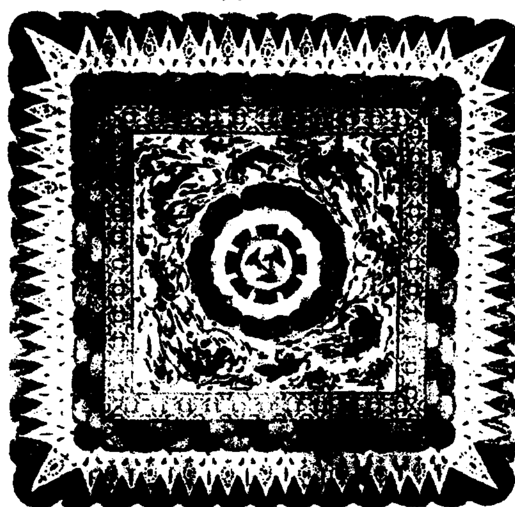


图 7.2.4

第二节　投影制图

在我国长时期工农业生产实践活动、美术创作中运用和研究用平面图形来表现空间形体：正投影、轴测图(仿射变换)和透视图(中心变换)，以表达实物形象。

一　正投影

山西大同云冈石窟北魏石刻为正投影一例(图 7.2.5)，莫高

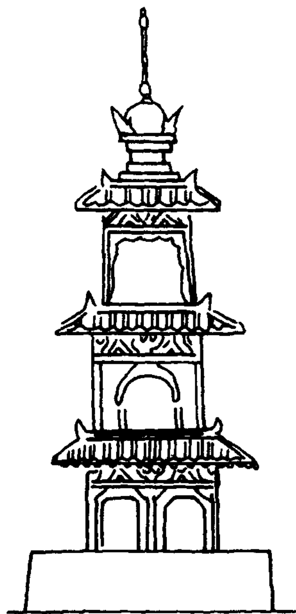


图 7.2.5

窟壁画中尤其不乏佳例：图 7.2.6 系 A237 单层木塔图，下为须弥座，稍上为栏杆。从投影可获知此塔平面为八角形，塔檐下还有

斗拱，上为攒兴顶，全座建筑物以宝珠结束。

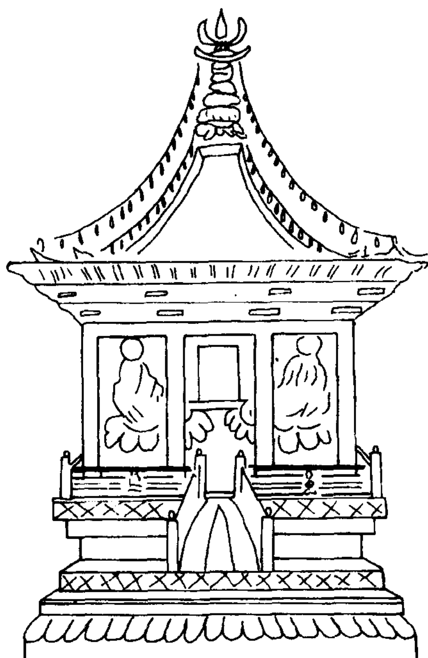


图 7.2.6

二　轴测投影

四川成都扬子山汉代画像砖民居(图 7.2.7)为一例。在敦煌壁画中这种图法比比皆是，图 7.2.8 系 *A*61 壁画中小宅，题名龙泉店，有人舂米、屋系单层 3×3 间，有屋基，四坡屋顶，是唐代建筑所常见。此为斜投影，垂直两轴变形为 120°相交。

三　透视画

陕西西安大雁塔西门门楣有著名佛殿石刻，这是唐代作品(图

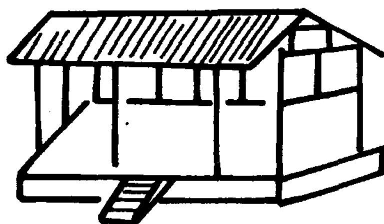


图 7.2.7

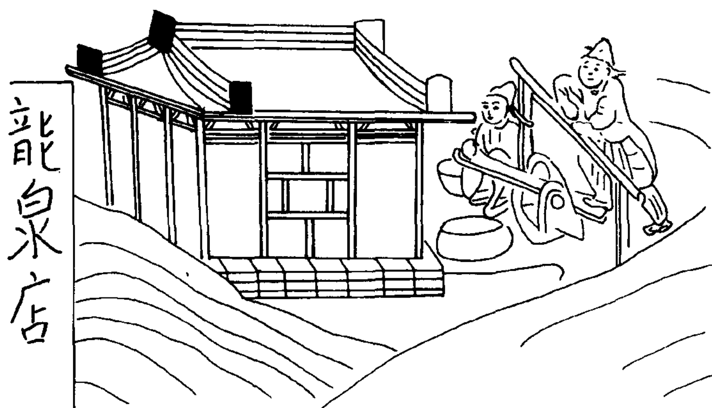


图 7.2.8

7.2.9)。从图上线条我们甚至可以作出透视中心。在敦煌壁画中凡是遇到大场面如讲经说法、庙会、建筑群等都用此投影图法，使画面人物、景观、层次前大后小以取得深远效果。如 A61 五台山建筑群，A85 南壁报恩经变、A112 南壁西方净土变、A163 东壁弥勒经变都用透视画画出。

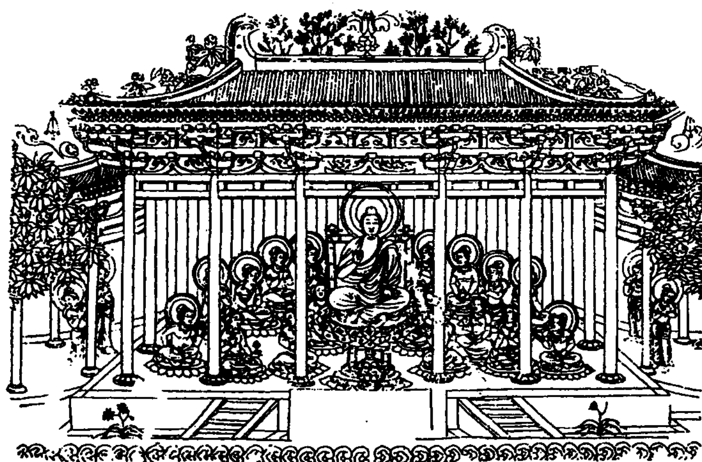


图 7.2.9

第三章 藏经洞遗书中的数学

我们选取藏经洞遗书中某些经卷有关内容论述两晋、南北朝、隋唐迄五代在西北边陲、敦煌一带民间及宫廷数学。本世纪20年代以来对经卷数学部分已做出不少成绩。最先是刘复在1925年在《敦煌掇琐》发表对编号为P3349经卷作出论述。1935年王重民在巴黎摄影此件与李俨，李俨认为此件已有残缺作出补文刊入《国立北平图书馆馆刊》。次年1936年向达在伦敦发现编号为S19，S5779，经仔细校勘知为P3349的残缺部分，盖1907年在慌忙中斯坦因撕裂原件劫走此两部分，剩下部分为一年后(1908年)伯希和带走，以致原件身首两处。经整理后李俨把全文刊入《中国算学史料》。1926年李俨根据摄影资料将编号为P2 667写论文载《中大季刊》，后连同他校补原先字迹非常潦草的编号为S930号收入《中国古代数学史料》。[①]80年代以来对敦煌数学也有论著多篇发表。[②]我们根据前人工作对有关经卷特别是对编号为P3849，S19，S5779；P2667；S930；P2490；S4661，S5856[③] 试作探索。

第一节 对数学的认识

《算经》序足以代表当时当地官民对数学作用的见解。从《算经》文字可以看出它的撰写时代应迟于《孙子算经》。《算经》序

① 李俨. 中国古代数学史料. 上海：中国科学仪器出版公司，1955

② 王进玉. 敦煌遗书中的数学史料及其研究. 见数学史研究文集(2)，1991

③ 参见本卷附编二，《算经一卷并序》简称为《算经》。

与《孙子》序大同小异，可以推断为作者学习《孙子》序后的心得体会。对于《孙子》序中过于抽象、玄妙之处就干脆删除，例如："观天道精微之兆基，……采神祇之所在，极成败之符验，穷道德之理，究性命之情。"作者以自己朴素的语言说明数学在日常生活、生产中，是无所不在的鱼水关系，他说"言人不解算者如天无日月，地无泉源，人无眼……识。"

《算经》序对数学的认识：前半段说明和比喻数学在人类事务中是头等重要的学科。作者把数学提高到是天地的经纬、五常（仁、义、礼、智、信）之本末，阴阳之父母（阴阳可理解为正、负，正逆关系），三光（日、月、星辰）之表里，皇极[1]之终始，万物之祖宗，六艺（礼、乐、射、御、书、数）之纲纪。《算经》序后半段系统点明数学在人们生产中的作用：推方圆，合规矩，均尺丈，制法度，立权衡，平斛升，剖毫厘，析黍叁。最后作者还作出结论：但行之者富贵有余，背之者贫且贱。

第二节　计　　量

《算经》第四段论计量。

一　度

最小单位为忽。定义，蚕口中吐丝为一忽，导出单位为丝、毫、厘、分、寸、尺、丈、引，共八种，都为十进。另外还有其他单位：匹、端、步、寻、常。值得我们注意的是：与《九章算术》比，缺里；与《九章算术》刘徽注比，丝、三国时称为秒；与《算

① 皇极历。刘焯在隋开皇十二年制定，参见本《大系》本卷第四编第一章第三节。《孙子算经》序此句作"四时之终始"，可见《算经》之作后于《孙子》。

书》[①] 第 6 题比，当时 6 尺为步，300 步为里，从《九章算术》旧制。但在《算经》中明确说“五尺为步”，可见《算书》之作早于《算经》[②]。又此处，《算经》在论度末尾补充定义度的基本单位：“又据大唐令文，诸以北方秬黍[③] 中者，黍之广为分。”[④] 可见《算经》是 8～9 世纪时作品。

二　地　　积

从《九章算术》：“二百四十步为一亩，一百亩为一顷。”另设堵以单位：“方丈曰堵。”

三　量

最小单位为圭，定义，六黍为一圭。导出单位为抄、撮、勺、合、升、斗、斛，共七种，都十进。另外还有石：“方一尺、深一尺六寸二分为一石，”这是《九章算术》旧制。又补充定义量的基本单位：“今云：二十黍为一圭。”此为《孙子算经》所无，当是唐时大尺、大斗、大两制的反映。唐时三斗为大斗[⑤]。

四　衡

最小单位为黍。定义：黍者，如一黍之重，导出单位为絫、铢、两、斤、钧、石。进制十黍为一絫，十絫为一铢，其余同《九章

---

① 我们称编号为 P2667 经卷为《算书》。

② 见附编一、第一节度制，初唐时 6 尺为步(《缉古算经》)，而中唐时 5 尺为步(传本《夏侯阳算经》)。

③ 秬黍，黑色黍。

④《唐六典》：“凡度以北方秬黍中者，一黍之广为一分。”《唐六典》为唐玄宗(685～762)时颁布。

⑤ 唐建国时量从古制，后改用大斗参见本卷附编一。

算术》。在《立成算经》[①] 中还补充有测定重量的另法，即金属的密度法，这反映当时的冶炼技术水平，我们列表比较如下：

表 7.3.1　金属的密度

金属	今测克/厘米^3	比重	《孙子》两/寸^3	比重	《立成》两/寸^3	比重
金	19.30	1	16.0	1	16.0	1
银	10.50	0.544	14.0	0.875	12.0	0.75
铜	8.93	0.463	7.5	0.468	8.0	0.50
铁	7.86	0.407	6.0	0.375	6.0	0.375
铅	11.34	0.588	9.5	0.593	/	/

《立成》的测定结果并不坏。

第三节　计　　数

《算经》第二、三、五段以及《立成》的大部分论计数。

一　命　数　法

《算经》第三段是命数法。本段一开始就说："数不过十"，是指数字只有一至九个，"名不过万"指万之后十进，只十、百、千，三种，万万后另改名称，如万万为亿。万万进的单位计亿、兆、京、该、梓、让、沟、间、政、载、极共 11 种，与甄鸾《数术记遗》相比，多出极这一单位，用指数记法达 10^{96}。此数甚大，大于希腊阿基米得《数砂者》充满宇宙之球砂粒数 10^{63}[②]，而小于宋代沈括

① 下简称《立成》。

② Heath T L. The Works of Archimedes. London: Oxford, 1895. 232

《梦溪笔谈》所说棋局都数[①] 1.74×10^{172}。

二 算筹与筹算

当时西北边疆和内地一样算具是算筹及筹算盘[②]（图 8.2.1）怎样运用算筹作筹算？文字叙述材料之详细、之具体，首推《算经》第二段及《立成》。用短划（竖或横》描绘运算结果（答案）。《算经》第二段说："凡算者正身端坐，一从右膝算起。"我国历代算书运筹图画素缺，"礼失而求诸野"，幸东邻日本有木刻算书插图[③]（图 8.2.2），作为《算经》插图可谓珠联璧合，正好相符。筹算盘后操算者正襟危坐，"从右膝算起"是指我国书写及数位均自右起，"一纵十横，百立千僵，万百相似，千十相望，六不积聚，五不单张。"在《立成》又作注解："凡算知法，大数左畔、小右厢。"后面又用横、竖短划形象地分别记出一纵、十横、百立、千僵、万竖、亿横的妙用。其尤妙者是《算经》第二段记九九表 45 句，第五段又进一步对 45 句乘积自乘，又分别做除法。可以认为这是对筹算初学者的基本训练，而《立成》对这些基本运算的结果，一一作出"图解"，即用横竖短划，记出乘积，这无疑对筹算教育有重要直观意义，对后世筹算史研究者是难得的文献——用算筹记数的真凭实据。我们照录如下：

| 一纵

— 十横

| 百立

— 千僵

① 钱宝琮主编．宋元数学史论文集．1966，北京．268；或本《大系》卷五第二编第三节。

② 据三上义夫藏品。

③ 据 1795 年日本木刊。

|　万竖

—　亿横

九九八(十)一　𝍰𝍠　直下八十一　𝍰𝍠

八九七十二　𝍯𝍡　通前一百五十三　𝍠𝍭𝍢

七九六十三　𝍮𝍢　通前二百一十六　𝍡𝍩𝍥

六九五十四　𝍭𝍣　通前二百七十　𝍡𝍯

五九四十五　𝍬𝍤　通前三百一十五　𝍢𝍩𝍤

四九三十六　𝍫𝍥　通前三百五十一　𝍢𝍭𝍩

三九二十七　𝍪𝍦　通前三百七十八　𝍢𝍯𝍧

二九一十八　𝍩𝍧　通前三百九十六　𝍢𝍱𝍥

一九如九　𝍨　通前四百五文　𝍣 𝍤

八八六十四　𝍮𝍣　直下六十四　𝍥𝍣

七八五十六　𝍭𝍥　通前一百二十文　𝍠𝍪

六八四十八　𝍬𝍧　通前一百六十八　𝍠𝍮𝍧

五八四十　𝍬　通前二百八文　𝍡 𝍧

四八三十二　𝍫𝍡　通前二百四十　𝍡𝍬

三八二十四　𝍪𝍣　通前二百六十四　𝍡𝍮𝍣

二八一十六　𝍩𝍥　通前二百八十　𝍡𝍰

一八如八　𝍧　通前二百八十八　𝍪𝍰𝍧

七七四十九　𝍬𝍨　直下四十九　𝍬𝍨

六七四十二　𝍬𝍡　通前九十一　𝍱𝍠

五七三十五　𝍫𝍤　通前一百廿六　𝍠𝍪𝍥

四七二十八　𝍪𝍧　通前一百五十四　𝍠𝍭𝍣

三七二十一　𝍪𝍠　通前一百七十五　𝍠𝍯𝍤

二七一十四　𝍩𝍣　通前一百八十九　𝍠𝍰𝍨

一七如七　𝍦　通前一百九十六　𝍠𝍱𝍥

六六三十六　𝍫𝍥　直下三十六　𝍫𝍥

五六三十　𝍫　通前六十六　𝍮𝍥

四六二十四	𝍪𝍣	通前九十	𝍱
三六一十八	𝍩𝍧	通前百八(文)	𝍠 𝍧
二六一十二	𝍩𝍡	通前一百廿文	𝍠𝍪
一六如六	𝍥	通前一百廿六文	𝍠𝍪𝍥
五五廿五	𝍪𝍤	直下廿五	𝍪𝍤
四五廿	𝍪	通前四十五	𝍬𝍤
三五十五	𝍩𝍤	通前六十	𝍮
二五十	𝍩	通前七十	𝍯
一五如五	𝍤	通前七十五	𝍯𝍤
四四十六	𝍩𝍥	直下十六	𝍩𝍥
三四十二	𝍩𝍡	通前廿八	𝍪𝍧
二四如八	𝍧	通前三十六	𝍫𝍥
一四如四	𝍣	通前四十	𝍬
三三如九	𝍨	直下九	𝍨
二三如六	𝍮	通前一十五	𝍩𝍤
一三如三	𝍢	通前一十八	𝍩𝍧
二二如四	𝍣	直下四	𝍣
一二如二	𝍡	通前六文	𝍥
一一如一	𝍠	直下一	𝍠

都计得一千一百五十五文。

此外，我们发现我国算书大概从5世纪，如《张邱建算经》，开始在题文、答文、术文后添加草文。草文叙述了筹算的演算全过程。在敦煌遗书算题中有的也添加草文。从草文中可见当题文复杂时，答案是若干中间过程的综合结果。所以在草文中会出现相应的算筹的位置关系叙述。例如《算书》第2题就说："置上马……乘之，退一等，得上马食粟……，置于上方。次置中马……，退一等，得中马食粟……，亦置上方。……次置下马，退一等，得下马食粟……。"又如第12题说："得一二十七尺，迁上十作寸，"

第13题说“得二十七尺，迁十作寸”都是筹算定位的生动描写。

第四节　算　题

在秘室遗书算术中我们还能找到不少很有意义的算题。它们反映本卷所论时期出自我国西北边陲宫廷、民间、军事、经济、政治等方面的数学问题。它们与定型的数学教科书有别，更能贴近生活实际。例如遇除法常出现余数，计算经济账目比较繁琐，这恰恰是质朴无华、未经加工的现实问题，这是可以理解的。

下文我们对《算书》(残)今存13题，《算经》第六段共10题及编号为S5856抄件分配比例题，作综合分析。

一　四则运算

(一)带余除法

《算术》第7和第8题。第7题是7 226÷8=903……2；第8题是1 892×35÷40=1 655……2，相当于《孙子》卷下第7题：今有36 454户，户输棉2斤8两，问：计几何？

(二)乘积求和

《算书》第1，第2题。第2题是5×32 323+4×24 341+3×22 321=325 942(升)。与《孙子》卷下第23题：今有“六万口”同型，后者只要求日食多少。而《算术》进一步要求月食、年食多少，同样第1题也作同样要求，使初学者得到大数乘法练习。这里我们有两点体会：其一，第1题最后答数是：男100 815人年食米达2 439 208斛8斗，第2题马78 985匹年食粟达11 733 912斛。这说明时当敦煌地处丝绸之路要冲，农业发达，人强马壮，人畜两旺。从两题题文犹可见当年人欢马嘶盛况。其二，第1题题文说，老男日食米七升，依年令递降至黄男(幼男)亦达四升，似有失实处。其实在初唐时升的绝对容量仍依汉制，仅及今升(1 000

立方厘米)的五分之一。[1] 七升不及今一升半，约1公斤，食量大的、可以吃得下。

(三)连乘积

《算术》第5，第10题。第10题是4×9×8×7×6×5×4×3×2=1 451 520。本题是说四王各领九军出征，统率雄师百万，组织严密，赫赫大唐军威，跃然纸上。对比《孙子》卷下第34题出门见九堤题也是连乘积题，但是乘幂，此题则为阶乘。

(四) 乘除混合运算

《算书》第6，第9题是300×18÷20×3，300×18÷40×8，……。与《张邱建》子卷下第24题安鹿角题相仿。

二　分配比例

七万八千四百，八人分之，得九千八百。
七人分之，得三百四十三。
六人分之，得二百九十四。
五人分之，得二百四十五。
四人分之，得一百九十六。
三人分之，得一百四十七。
二人分之，得九十八。

我们在编号为S5856号抄件上发现有四个算题，题文叙述为同一方式。举其中一题，我们用汉语传统自右而左竖写习惯录出。

① 参见本卷附编一。

(改用简体字,并添加标点符号)。令人费解的是：右起第一句是正确的，而另外六句话，为什么人数少，分得数也依次减少？当我们读《孙子》卷中第24题才获知谜底:《孙子》题：今有钱6 930。欲令216人作9分分之,81人与2分,72人与3分,63人与4分,问：三种各得几何？答：2分、人得钱22，3分、人得钱33，4分、人得钱44。这是一道加权分配比例算题，即6 930钱按 $(81\cdot\frac{2}{9}):(72\cdot\frac{3}{9}):(63\cdot\frac{4}{9})=18:24:28$ 连比分配。分成三份：81人得1 782，72人得2 376，63人得2 772；相应地三种人各得22，33，44(钱)。按照上面所录题文，如用《孙子》上引题来理解应增删题文，才有原题的答数。在增删过程中实际是解六元一次不定方程，所以增删方法不是唯一的。我们增删题文为：[今有钱]七万八千四百。[欲令二百七十三人作二十七分分之。二十人与二分，二十人与三分，二十人与四分，二十三人与五分，二十五人与六分，一百六十五人与七分。问：六种各得几何？答曰：一百六十五人] 七人分之得三百四十五，[二十五人、] 六人分之，得二百九十四，[二十三人、] 五人分之，得二百四十五，[二十人、] 四人分之得一百九十六，[二十人、] 三人分之，得一百四十七，[二十人、] 二人分之得九十八。

三　几何计算

《算书》第六段共10题都是平面图形面积计算。其术文之后已明显有《张邱建算经》开始的草文苗头。《算经》第3、第4，第11～13题都与立体体积计算有关。其中第3题所谓堑，是等腰直角三角形截面的挖方。题文说深8尺、广8尺是截面的两等腰，而截面的宽是 $8\sqrt{2}$，因此截面面积是 $(4\sqrt{2})^2=32$。正如术文说：“广八尺半之…深八尺乘之。”第12题是说长宽高都是3尺的蜡，每日燃1立方寸，问：可以燃多少日？答数是75年，此与《孙

子》卷下第 2 题“九厘渠、三寸鱼”与西欧阿尔昆《益智题集》第 1 题蜗牛赴宴①为同性质的趣味算题。在立体计算中对除数为小数的除法有很好的简便算法的认识，其中第 11 题：$3^3\div(0.5)^3=3^3\times 8$，第 12 题：$3^3\div(0.1)^3=30^3$，第 13 题 $3^3\div(0.3)^3=30^3\div 27$。这是唐代以前数学文献中罕见的佳例。

第五节 算 表

编号为 P2 490 的抄件系五代后周周太祖郭威广顺二年(950 年)写本，这是一张长方形田从长(x 步)，宽(y 步)到地积(亩)的换算表。图 7.3.1 中相当于说 $x=10\sim60$ 整步，$y=10\sim60$ 整步在表上即可查到 $A(亩)=xy\div240$。从乘法的交换律 $ab=ba$，和九九表一样，算表中只写出其大半，即图中 1～15 块，但其中 2，3，4，11 四块漫漶，文字已不可识。我们录第一块如下：

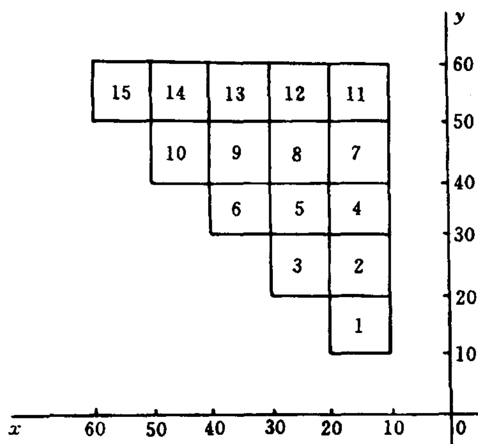


图 7.3.1

① 参见本《大系》副卷第一卷阿尔昆《益智题集》。

二十步	十九步	十八步	十七步	十六步	十五步	十四步	十三步	十二步	十一步	十步	
一亩半四十步	一亩半二十步	一亩半	一亩一百步	一亩八十步	一亩六十步	一亩四十步	一亩二十步	一亩	半亩一百步	半亩八十	二十步
	一亩半一步	一亩一百两步	一亩八十三步	一亩六十步	一亩四十五步	一亩二十六步	一亩七步	半亩百八步	半亩八十九步	半亩七十	十九步
		一亩八十四步	一亩六十六步	一亩四十八步	一亩三十步	一亩一十二步	半亩一百十四步	半亩九十六步	半亩七十八步	半亩六十	十八步
			一亩四十九步	一亩三十二步	一亩一十五步	半亩一百十八	半亩一百一步	半亩八十四步	半亩六十七步	半亩五十	十七步
				一亩十六步	一亩	半亩一百四步	半亩八十八步	半亩七十二步	半亩五十六步	半亩四十	十六步
					半亩一百五步	半亩九十步	半亩七十五步	半亩六十步	半亩四十五步	半亩三十	十五步
						半亩七十六步	半亩六十二步	半亩四十八步	半亩三十四步	半亩二十	十四步
							半亩四十九步	半亩三十六步	半亩二十三步	半亩一十	十三步
							半亩三十六步	半亩二十四步	半亩十二步	半亩	十二步
		半亩七十八步	半亩六十七步	半亩五十六步	半亩四十五步	半亩三十四步	半亩二十三步	半亩十二步	半亩一步	一百一十	十一步

算表设计者匠心独具：长宽10～60间整步数长分形地积从表上立刻可查出其亩数（精度至0.5亩）或其余数；超过60步的还可通过乘法运算简便地获得结果。此外，设计者还化大为小把十一块结果抄写在同高长方形手册上以便携带。

第六节 几何图形

一 平面图形

《算经》第六段共10题，分别计算一种平面图形，我们对照五种算书，以√号表示论述同一种图形。

表7.3.2 五种算书中各种题型对照

图形名称	《算经》	《九章》	《孙子》	《五曹》	《夏侯阳》	《阿尔昆》
方 田	√	√	√	√	√	
直 田	√			√	√	√
圆	√	√	√	√	√	√
四不等	√			√	√	√
蛇 田	√			√		
环	√	√		√		
角 田	√			√		
箕 田	√	√		√	√	
圭 田	√	√		√	√	√
鼓 田	√			√		

虽然《五曹》对10种图形都有论述，但描述详略不一，例如对"角田"《五曹》只说："今有田如牛角，纵五十步，口广二十步。"《算经》则添加："本粗末细，外曲长，内曲短。"数据添为相应四种尺寸，显然对地积精度有所提高。与同时期西欧数学代表作阿尔昆《益智题集》比，在图形种类及地积公式的精度上也胜一筹。

二 立 体

《算书》第 3 题为堑，第 4 题为堤。它们的体积公式从《九章》。第 11～13 三题都是立方体分割为小立方体，求含个数。《孙子》、《张邱建》都有相仿题。《算书》作者熟练计算已在第四节叙述。我们同意苏联别列兹金娜在她的《中国古代数学》一书中的观点——提高到是中国古代数学家对体积基本概念的正确认识。

第八编

本时期数学发展的历史和世界意义

第一章　对我国后世数学发展的影响

第一节　算经十书

初唐列于国子监的算学科，每年举行国家考试，其中必读书12部。除了《九章算术》、《周髀算经》、《海岛算经》在本时期以前已完成之外，其余《孙子》、《五曹》、《张邱建》、《夏侯阳》、《五经算》、《数术记遗》、《三等数》、《缀术》与《缉古》都是本时期所作专著。唐代重视数学教育为我国历史罕见。及北宋时期，社会经济有了进一步发展，推动科学研究，雕版印书事业正值蓬勃发展时期。元丰七年(1084年)秘书省发起刊刻算经，这是最早的官刻本数学典籍。北宋刊本实际只有9种：刻书时《缀术》已失传，《三等数》、《数述记遗》也未刻。南宋嘉定六年(1213年)鲍浣之翻刻北宋九部算经时，加刻在杭州发现的徐岳《数术记遗》，共十书。这是中算普及和研究的母本，其学术价值之高是不言而喻的。在此十部算经中，本时期写成的专著据十之六七，在数量上占大多数。

第二节　度量衡与记数法

《孙子》卷上详列计量制度、度量衡基本单位定义和导出单位名称及其进制。这对宋、元、明、清一千多年间数学计量发生深刻影响，基本上沿用无改[①]。这在秦九韶、杨辉等专著中各种算题用量可以检测。及程大位《算法统宗》(1592 年)，虽成书已在《孙子》后一千多年，但其卷一度量权衡节中：量法、衡法从《孙子》，度法在忽以上从《孙子》，忽以下单位则受《数术记遗》以及佛经的影响，有一定改变。

《孙子》卷上详列大数记数法。列举亿、兆等十种单位，都万万进《数术记遗》托辞黄帝："数有十等，及其用也，乃有三焉。"所谓十等，即《孙子》列举的十种单位；三用是指三种进制：含《孙子》的万万进。这种记数法沿用到明代，程大位《算法统宗》卷一全盘承袭，几乎一字未动。

第三节　算　　术

我们已在本《大系》第二卷有关章节指出本时期所著书大多是《九章》的简写本。但是毕竟仍有各书的特色，特别是有不少传世算题例，如《孙子》雉兔同笼、妇人盈杯、有人盗绢等题，一再为宋明算书如杨辉、程大位著作中引用。或改变文体，改换数据，仍为千百年读者喜见乐闻。

---

① 参见本卷附编一，中国清代(及)以前计量制度新考。

第四节　几　　何

本时期各数学典籍有几何学创见的较少。但祖暅对球积公式的推导出类拔萃，匠心独运。后世能领会者很少，何论创新？直至清代李潢（？～1812）在《九章算术细草图说》中真知灼见，作图并释。祖暅的成果对徐有壬（1800～1860）专著《截球解义》有深刻影响。又王孝通在水利工作中对一般堤形公式提出正确见解，这对秦九韶著书有关土木建筑估料是有师承关系的。又《五曹算经》田曹中首次提出四不等田近似面积公式，宋元算书对此也有反映。程大位《算法统宗》卷二方田有四不等田，但他改为：分田为一长方形，二直角三角形，分别计算面积，再求和。

第五节　代　　数

一　不定分析

《孙子》卷下第26题物不知数题。又第35题："今有三女：长女五日一归，中女四日一归，少女三日一归。问：三女几何日相会？"《张邱建》卷上第10题："今有封山周栈三百二十五里。甲、乙、丙三人同绕周栈行，甲日行一百五十里，乙日行一百二十里，丙日行九十里。问：周行几何日会？"对南宋秦九韶《数书九章》大衍总数术的创立起到启蒙、启迪作用。

《张邱建》卷下第38题百钱百鸡题为同类题的开山之作。宋代杨辉《续古摘奇算法》卷下百钱百果题，显系张题改编，而明程大位《算法统宗》卷十难题：千钱百鸡则是张题的另一种说法。

清代学者发现解不定线性方程组可以借助于大衍求一术、骆腾风《艺游录》讨论线性方程组与同余式的关系。对张邱建百鸡

题他论述很是透彻。他把百钱百鸡题方程组

$$\begin{cases} x+y+z=100, & \text{(i)} \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100, & \text{(ii)} \end{cases}$$

其中 x，y，z 分别为鸡翁，鸡母，鸡雏只数，化为

$$7x+4y=100,$$

就用大衍求一术解同余式

$$4y\equiv 2 \pmod 7), \qquad \text{(iii)}$$

解出 $y_0=4$ 后，回代(i)，(ii)两式得到一组特解：

12，4，84，他目力犀利，把(iii)式中 x 系数 7 看成鸡母减率(y 的系数)，4 看成鸡翁增率，7－4＝3 看成鸡雏增率，这就给出了通解。而且他还从通解指出本题正整数解的组数是 12÷4＝3 个。

丁取忠对百鸡题又作出通俗的解释。

时曰醇对百鸡题有深入研究，著《百鸡术衍》(1861 年)共载 28 题，都是线性不定方程组题。每题分别用方程法则及同余式法则求解。

《百鸡术衍》设题进一步复杂，有的方程组个数虽多于未知数个数，而为不定方程组；有的未知数个数增多(达 9 个)，自由度增多(有达 3 个)。这都是张邱建百鸡术题的进一步研究的不同成果。

二　组合分析

《孙子》卷下第 5 题："今有棋局一十九道，问：用棋几何？"为北宋学者沈括名著《梦溪笔谈》棋局都数题提供了素材。

三　多项式方程

我国数学从《九章》开方、开立方术发展到宋朝形成多项式

方程数值解法(增乘开方)及其列方程法(天元术)，这是与本时期数学的奠基作用是分不开的。

秦九韶《数书九章》中数值解一般非负系数高次方程达20多例，方程次数有达10次。这种数值解的源头，清阮元在其《畴人传》中有精辟见解，他说："读九韶书而后知昔人开方除法，固有一以贯之者。"我们已在本《大系》第二卷第三编第一章第三节指出王孝通在多项式方程方面的开创性工作。一方面是九章开方术和开立方术传统的继承，另一方面为后世天元术提出启示。阮元在《畴人传》王孝通传中敏锐地指出："盖算数之理，愈推愈密。孝通缉古实后来立天元术之所本也。"日本学者三上义夫在其专著《中国算学之特色》中也中肯地指出："唐王孝通之三次方程式已用与天元术相同之方法。故所谓天元术，其形式上虽新，而在传统上则谓为承继古式，亦无不可也。"[①] 综上所说，南宋秦氏数值解多项式方程是受到唐代《缉古算经》的深刻影响，而北方李冶天元术的发明应该说也是其来有自的。

---

① 三上义夫. 林科棠译. 中国算学之特色. 上海：商务印书馆，1929

第二章　本时期中算东传对和算[①]的深远影响

三上义夫的《中国和日本数学发展史》[②]在下编概论中说:“日本上古时代所掌握的数学知识我们一无所知。”藤原松三郎手撰《明治前日本数学史》[③]五巨卷以中国数学摄取时代开篇，对日本上古数学也不着一字。我们只在远藤利贞《日本数学史》[④]第一编略见端倪:“上古时代以小石或木片为算器以记数，用十进位制。度量衡制度极为粗糙，例如计长度用握(合并除大拇指以外四指宽度)、阿多(伸展大拇指、中指之间跨度)、比吕(伸直两臂，左右中指尖之间距离)。远藤对那一时代文化总结说:“上古蒙昧，蠢尔原人，无智无算，固无论矣。”

公元3世纪时朝鲜、日本之间有战争，日本才与我国有间接来往，“举凡簿籍计算和建筑、工艺、佛法都由此时间接输入日本。”[⑤]公元554年(我国南朝梁元帝承圣三年，日本钦明天皇十五年)，“百济易博士施德王道良、历博士固德王保孙、药博士奈率王有悛陀等始来朝。”[⑥]这是中国历算传入日本最早文献记录。公元602年，“百济僧观勒以历本、天文、地理、遁甲、方术之书奉献。阳胡史、祖玉陈学历法、大友村主、高聪学天文遁甲，山背

① 我们简称中国、日本的传统数学为中算、和算。

② Mikami Y. The Development of mathematics in China and Japan. Leipzig，1913

③ 藤原松三郎. 明治前日本数学史. 日本学士院，1960

④ 远藤利贞. 日本数学史. 平山谛修订本. 1981

⑤ 李俨. 中算输入日本的经过. 见：中算史论丛. 第五集. 1955

⑥ 舍人亲王. 日本书记. 卷十九. 公元720

臣、日并立学方术，俱学成。”[①] 我国典藉也记当时中日直接文化交流史实：“开皇二十年(600 年)倭王姓阿每、字多利思比孤、号阿辈鸡弥，遣使诣阙。”[②]“大业四年(608 年)三月壬戌百济、倭……并遣使贡方物。”[③] 以后中日交通益为频繁，历史记载日本发遣隋史共三起，遣唐使共十八起[④]。中国天算之学就此源源传布东瀛。

中算引入日本后对和算影响非常深刻。本章仅就我国南北朝前后已具有的数学成果对其所起积极作用，分八个方面分别论述。

第一节　算器及运算

中算运算素来用算筹。算筹形状、大小首见《汉书·律历志》：“长六寸、径一分”。经 1971 年在陕西千阳县、1975 年在湖北江陵县先后出土西汉时骨制、竹制算筹，从实物验证：文献记载是可靠的。经后世长期使用，算筹逐渐缩短并加粗。筹算用算盘素无记载，严敦杰曾作考据[⑤]，引述宋末元初时刘田诗。

一　筹　算　盘

不作夔商舞，休停饼氏歌。
执筹仍蔽簏，辛苦欲如何。

诗题算盘显是指筹算盘，但诗意含糊，对当时筹算盘究系何状，毫无信息。筹算引入日本、经千百年长期使用，算筹逐渐定形：“竹或木制，长一寸六分，方截面，方边长为筹长六分之一。”[⑥]

---

① 舍人亲王. 日本书记. 卷二十二. 公元 720
② 隋书. 倭国传. 北京：中华书局，1975
③ 隋书. 炀帝纪. 北京：中华书局，1975
④ 辻善之助. 中日文化交流史. 方纪生中译本. 1979
⑤ 严敦杰. 算盘源流. 东方杂志，1944，40(2)
⑥ 远藤利贞. 日本数学史. 修订本. 1981. 33

筹算盘纸板或木板制成，画纵横线作方格成棋盘状，每格大小以能容记数用算筹为度。我们从日本数学书籍可以看到源出中国的筹算盘(图 8.2.1)及其运算实况(图 8.2.2)。

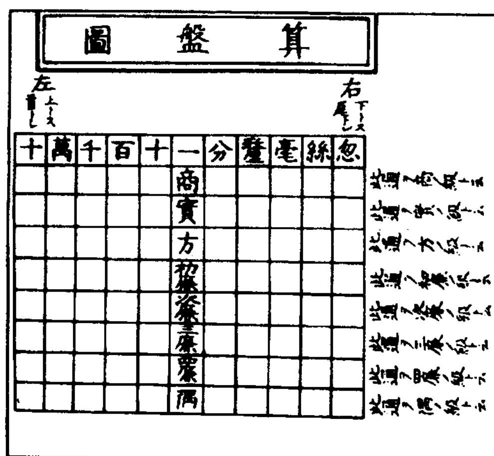


图 8.2.1



图 8.2.2

日本算筹记数方法用《孙子算经》卷上所说："一纵十横，百立千僵，……"八言诀，某位无数，不记算筹，以为空位。遇到负数则按《九章算术・方程》刘徽正负术注："以红色、黑色以别

正负，或以斜正为异。”乘除运算用《孙子算经》上中下三行法。开方、开立方用《九章算术・少广》[①] 法则。

第二节　记数法与命数法

筹算结果及其中间过程，我国一向以算筹象形记号记数，空位则用记号○，入宋后结合汉字出现简写体如

〤（4）　　〥（5）　　〩（9）

日本记数法严格按算筹象形，中国上述简写体并未采用，例如

米 29 石 5 斗 1 升 7 合 2 勺记为 〢〨〣丨〧〢勺，不作〢〩〥丨〧〢勺。[②]

日本命数法、对大数万位后有亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载、极十一种单位。前十种单位采自《数术记遗》，“极”当采自唐宋其他中算典籍。[③]其进位制采用《数术记遗》：“黄帝为法，数有十等。及其用也，乃有三等。……三等者，谓上、中、下也。其下数者，十十变之。……中数者，万万变之。……上数者，数穷则变。若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。”对小数单位后有分、厘、毫、丝、忽、微、纤、沙、尘、埃等十种单位，都十进。其前六种《九章算术・方田》刘徽注已采用，后四种当采自宋、元、明中算书。

---

① 远藤利贞．日本数学史．修订本，1981．35～37

② 佐藤茂春．算法天元指南．元禄十一年本刻本．卷一．6 页

③ 敦煌千佛洞算书中有极这一单位，参见第七编第三章第三节

第三节　著书体例及数学用词

和算家著书都用《九章算术》体例：先列题文，紧接题文为答案，然后具术文、例如关孝和《括要算法》(1712 年)齐约术(求最小公倍数的方法)所设题就使用这种体例：

“今有六个、八个、九个，问：齐约之，几何?”

“答曰：七十二。”

“术曰：六与八互减，得等数二，以约六得三。三与八相因得二十四。二十四与九互减得等数三，以约二十四得八。八与九相因得七十二，合问。”

汉语数学词汇，一部分在公元元年前后已经定形。《算经十书》是我国古典数学百科全书，其中大多数经典在南北朝前后已广泛流传，而各种数学用词也粲然大备。中算输入日本后和算就全盘采用汉语数学词汇。上例所见词：等数(最大公约数)、约(约简)、因(相乘)与中算所用同义。此外当时中算主要用词如下：

算术，位(数位)，整数、奇数、偶数，合、和，减、差，乘、倍、积、自乘，除、法、实、实如法而一、商、余，分数、分母、分子，少半、太半、中半、强半、弱半，约分、通分，比、衰分、反衰。

正数、负数，幂、开方、开立方，方程。

高、长、广，圭，方，勾、股、弦，圆、弧、弦，圆周率，堡垮，锥，台。

度、分、秒。

等一再在和算著作中使用。其中也有变化，例如幂字有时简写为巾；很多引用如今，有些因文字改革废去，例如幂字于 1947 年日

本学术用语审议会决定用“累乘”代替。[①]

第四节　计量制度

公元7世纪上半叶日本开始采用我国斗、升、斤、两制度。公元606年仿中国制度制漏刻时计，一昼夜时间等分一百刻。8世纪初先后两次根据唐代标准统一全国度量衡制度。702年(唐长安二年、日本大宝二年)颁布《大宝令》，721年(唐开元九年、日本养老五年)颁布《养老令》，对各种计量都有相应明令规定。

度　公元646年日本用我国南北朝时北周(557～578年)玉尺为长度基本单位[②]。《大宝令》：“十分为寸、十寸为尺、十尺为丈。”日本尺称为曲尺，模拟当时唐代标准尺、折合曲尺九寸七分八厘。今测奈良法隆寺藏文物，象牙曲尺，确合唐尺九寸八分弱。[③]一千二百多年来日本尺度单位值变化不大，直到明治维新以前在日本流行的四种尺经实测长[④]：

享保尺	30.363 厘米
折衷尺	30.304 厘米
量地尺	30.369 厘米
四郎尺	30.258 厘米

《大宝令》还仿中国制度规定5尺为1步，300步为1里。

量　《大宝令》也仿唐制：“十合为升、十升为斗、十斗为斛。”升的大小，历代有变化。至17世纪吉田光由《尘劫记》(1627年)、《算用记》(1628年)《竖亥录》(1639年)都记载有标准升尺度：方底4.9寸×4.9寸深2.7寸=64.827立方寸。日本宽文

---

① 日本文部省．学术用语集．数学编．1964

② 本卷附编一，我国清代及以前计量制度新考。

③④ 伊东俊太郎等．科学技术史事典，1983

(1661～1672 年)国家正式规定京升容积为 64.827 立方寸，颁布全国通行。

衡　《大宝令》也采用唐时衡制。我国唐时改 24 铢 1 两为 10 钱 1 两，10 分 1 钱。日本室町时代(14 世纪)也跟着改革、定 2 铢 4 累为 1 钱，并设新单位贯＝1 000 钱＝6.25 斤。

由于日本度量度衡都从唐制，因此直到本世纪初 1901 年(日本明治二十四年)颁布度量衡法时，其中规定

1 尺＝0.303 0…米，是以折衷尺为基准确定的。

1 升＝1 804.1 立方厘米，是从京升折算得来。

1 斤＝0.6 公斤，还保存《大宝令》遗制。

在明治维新以前对时间、角度计量日本也从中国制度。例如关孝和天算著作《天文大成辑要》，《宿曜算法》，一日分 100 刻，刻以下分、秒都百进。角度、周天也列 365 度 4 分度之一。度下分、秒也都百进。

第五节　天　文　历　法

从公元 7 世纪末至 9 世纪中叶约 200 年间文献记载日本直接采用我国历法五种，可以列表说明如下：

表 8.2.1　日本直接采用我国历法(7 世纪末至 9 世纪中叶)

历法名	制历人	中国始行	日本采用	传历人	改历原因
元嘉历	何承天	宋元嘉二十年(443 年)	持统天皇元年(692 年)		
麟德历	李淳风	唐麟德三年(664 年)	天武天皇元年(697 年)		旧历较实际天象迟 53 刻
大衍历	僧一行	唐开元十五年(727 年)	天平宝字八年(764 年)	吉备真备	旧历迟 14 刻
五纪历	郭献	唐宝应元年(762 年)	天安二年(858 年)	羽栗巨翼	旧历早 17 刻
宣明历	徐昂	唐长庆二年(822 年)	贞观三年(861 年)	马孝慎	旧历迟 10 刻

第六节　数学教育

唐代数学教育制度详载新、旧《唐书》。其中有记学校教员和学生人数、入学资格及学习内容。①

唐代国家数学教育制度，朝鲜率先响应。高句丽金富轼(1075～1151)著《三国史记》说："国学属礼部，神文王二年(628 年)景德三年(742 年)改为大学监。惠察王(764 年)复故，卿一人……，博士若干人、数不定，助教若干人、数不定。……以缀术、三开、九章、六章教授之。凡学生位自大舍己下至无位，年自十五至三十皆充之，限九年。若朴鲁不化者，罢之。"又据朝鲜《增补文献备考》卷 188 记这种制度还延续到 12 世纪："仁宗十四年(1136 年)凡明算式贴经，初日帖九章十条，翌日贴缀术四条，三开三条，

① 详见本卷第四编第三章第一节有关内容。

谢家三条，两日并全通。”

模拟中国的朝鲜数学教育制度也影响了日本。《大宝令·学令》记大学寮制度设：“算博士二人、算生三十人。”大宝、养老二令《令义解》(833 年)详记：“凡大学生取五位以上子孙及东西学部子为之。若八位以上子，情愿者听。国学生取郡司子弟为之，并取年十三以上、十六以下聪会者为之。凡算经：孙子、五曹、九章、海岛、六章、缀术、三开、重差、周髀、九司各为一经。学生二分其经，以为之业。凡算学生，辨明术理，然后为通。试九章三条，海岛、周髀、五曹、九司、孙子、三开、重差各一条，试九全通为甲，通六为乙。若落九章者虽通六犹为不第。其试缀术、六章者准前，缀术六条、六章三条。”

从上引文献可见中、朝、日三国在 7 世纪时数学教育制度传布脉络很是明显，大同小异、同中有异，从此可以了解各自：

——学校名称、教师、学员名额、年龄、入学资格。

——所用教学用书、主次区别、分班规定。

——考试办法、及格标准。

第七节　中算东传书目

从上节大宝、养老二令《令义解》所记数学教育制度，可见我国《算经十书》大部分内容已先后传到日本。日本贞观十七年(875 年)冷泉院失火，国家藏书尽为灰烬。宽平年间(889～897)为亡羊补牢藤原佐世奉命撰《日本国见在书目》。[①] 书目分 40 类，1579 部，16 790 卷，与我国《旧唐书·经籍志》同为 9 世纪目录学重要文献。其中有关天文、历法数学书目除大学寮指定必读书外还记有张邱建算经、夏侯阳算经、五经(算术)与(数术)记遗。此

① 《续群书类丛本》卷八八四。

外还记有

——刘徽注、祖中注、徐氏撰《九章》各9卷。

——祖中注《九章术义》、《九章十一义》、《九章图》。

——《九章乘除私记》、《九章妙言》、《九章私记》。

——徐氏注、祖仲注《海岛》、《海岛图》。

——《缀术》。

祖中、祖仲当是祖冲之笔误，徐可能是徐岳。这些书：《九章图》、《海岛图》、《缀术》以及刘、祖、徐注《九章》等都是中算史上稀书珍籍、《见在书目》所记正可证明9世纪时秘本尚存人间。

朝鲜、日本曾列为国家数学教育必读书的《三开》、《六章》、《九司》都未见我国经典，而《见在书目》赫然俱在，而且还有进一步说明：《三开》3卷，《三开图》、《六章》6卷、高氏撰，《六章图》、《六章私记》、《九司》5卷，《九司算书》。而《令义解》还记有细节：《三开重差》，释云：三卷、高氏也，古记无别。《六章》，释云：六卷、高氏也，古记无别。《九司》，释云：一卷、《九司》、古记云：一卷，九司事，杂记也。

第八节　数学研究内容及其方法

自从7世纪以后和算研究有起有伏，入江户时代(1603～1867)以关孝和为核心而达高峰。和算最先受《算经十书》影响，17世纪又引入宋元明时期中算书。日本人民学习中算有继承、也有创新。其中也不乏失误和缺漏。我们只就和算在7世纪至9世纪期间所传中算算书影响择要论述。

一　九九算

日本天禄元年(970年)出版儿童读物《口游》，所载九九表：从九九八十一始，终一一得一，当受中国影响。《孙子算经》卷上所

拟 45 个乘方题也如同样程序："九九八十一自相乘几何？"至"一一如一，自相乘得一"止。又敦煌遗书、居延汉简所载九九表也是同一程序。[①]

二　互　减　术

和算称《九章算术》方田章第六题更相减损术为互减术，借以求等数、求小数的最佳渐近分数，还用来解不定不等式。[②]

三　齐　约　术

求自然数的最小公倍数或几个分数周期的公共周期的方法，和算称为齐约术[③]。类似于《孙子算经》卷下第 35 题三女相会题，松村茂清《算俎》(1663 年)有题"今有老者十二日值勤一次，少者十日一次，问：多少天后两人相遇？"解法说："十与十二互减得等数二，作为法。十二日或十日作为实。六日或五日分别乘以十或十二，得答数六十日。"类似于《张邱建算经》卷上第 10 题封山周栈题，会田安明《算法交会术》(18 世纪)发展为求五个分数周期的公共周期问题："周天三百六十五度四分度之一也。今有甲乙丙丁戊五星，共会于同度。其运旋如环无端。只云五星一日行各不齐，甲星二十八度一十六分度之一十三，乙星一十九度四分度之一，丙星一十三度一十二度之五，丁星一十一度七分度之一，戊星二度七分度之七。几日而再会于同度乎？问：其日数及各遍周天其回次度几何？"原书有答数："再会日数 368 172 日。期间甲、乙、丙、丁、戊五星分别运转 29 043，19 404，13 524，

---

① 李俨．中国古代数学史料．1954．16～17

② 沈康身．更相减损术源流．《九章算术》与刘徽．北京：北京师范大学出版社，1982

③ 见附卷第一卷，关孝和《括要算法》。

11 232，2 800 周。"关孝和对诸约术、剩一术、剪管术尤其有深人研究。[①]

四　入　子　算[②]

入子算相当于中算衰分术。《尘劫记》(宽永十八年版)有题："分别容一升、二升、三升、四升、五升、六升、七升、八升八个锅子，共值银四十三钱二分。如按容量大小递增锅价，问各值银几何?" 原书有答："1.2 两，2.4 两，3.6 两，4.8 两，6 两，7.2 两，8.4 两，9.6 两。"(图 8.2.3)

同书(宽永八年版)有题："三人合股经商，共本一百六十贯。甲、乙、丙分别出股六十四贯八百钱，五十二贯三百钱，四十二贯九百钱。共赚货物人参二百五十斤，沈香七十斤，绸二百八十斤，丝八千四百斤，问：三人各应得几何?"

图 8.2.3

五　级　数　算

《算经十书》所有数列问题在和算都有反映。例如《口游》："今有竹束，周围二十一，问物数几何? 答曰：四十八。术曰：'置周员加三算，自乘得五百七十六，以十二除，得四十八。"'，这儿，$3+9+15+21=48$。

这就是说，设外周束数是 p(末项)，项数为 n，则 $n=\{(p-3)\div$

---

① 沈康身. 秦九韶大衍总数术与关孝和诸约之术，秦九韶与数书九章. 北京：北京师范大学出版社，1987

② 入子：系日语，表示重量或容量依次渐增的成套器皿。

$6\}+1=(p+3)\div 6$，因此总数 $S=n(p+3)\div 2=(p+3)^2\div 12$。此题与《张邱建算经》卷上第 23 题女子不善织题都是相同等差级数题。

《算俎》有题："今有竹七节，下二节共容谷九升六合，上三节共容谷九升。竹节容量依次递减。问七节各容谷多少？"原书答数："最下一节容谷 5 升，逐节差 4 合。"此题显是《九章算术》均输章第 19 题今有竹九节题改编。

《尘劫记》(宽永十八年版)有题："棋盘上第一格放米一粒，依次加倍放入次格。棋盘共有八十一格，问共米多少？"原书答数说有米 402 975 272 204 876 391 石 5 斗 6 升 8 合 7 勺 2 抄 5 撮 2 粒。此题与《孙子算经》卷中第 27 题女子善织题同是等比级数题。而且以每升含米 60 万粒折成石数，又与《孙子算经》卷上度量衡制度规定相合。

六　利　息　算

和算著作有很多与计算利息有关算题，多不胜举。而山田正重《改算记》(1656 年)卷中有题："米六石，六年本利和得六十石，问：年利率是多少？"原书说：60÷6，开平方，再开立方，得数 0.467 801。这一处理方法是在中算基础上创新之作。

七　盗　人　算

《孙子算经》卷中第 28 题："今有盗库绢，不知所失几何。但闻草中分绢：人得六匹，盈六匹；人得七匹，不足七匹。问：人、绢各几何？"这个中算归属于盈不足类问题、和算称为盗人算。《尘劫记》(宽平二十年版)《改算记》、礒村吉德《算法缺疑抄》(1683 年)都录有类似问题。《尘劫记》所设题为："盗人于桥下分绢，每人分八匹，不足七匹。每人分七匹，盈八匹。问盗人数、共分绢多少？"答数是 15 人，绢 113 匹。原书还按《九章算术》盈

不足术解题：七匹加八匹得十五匹，这就是盗人数”（图8.2.4）。



图 8.2.4

八　方　程　术

和算前期用中算方程术解线性方程组。远藤利贞《日本数学史》第二编录日本古算题：“马三头、牛四头、羊三头，价一百三十一两。马二头、牛三头、羊十头，价一百二十两。又马四头、牛一头、羊八头，价一百零四两。问：各一头价几何?”原题答马、牛、羊各一头分别值15，20，3两。题后附筹算图式。远藤说：“从此可知当时学术水平之高。”《尘劫记》(宽永十八年版)有四元线性方程组题：“松木八十根、桧木五十根，值二千七百九十钱；松木一百二十根、杉木四十根，值二千三百二十三钱；杉木九十根、栗木一百五十根，值一千九百三十二钱；栗木一百二十根、桧木七根，值四百十九钱。问：各种木材每根值多少钱?”

九　百五减算

《孙子算经》卷下第26题“物不知数”有关解一次同余式组问题长时期成为日本民间数学游戏。14世纪时二卷本《帘中抄》有这类算题，称百五减算。《尘劫记》(宽永十一年版)题目已改为：“七七减余二，五五减余一，三三减余一，问：棋几何?”并仿照《孙子算经》解法说：“七七数置十五、余二置三十，五五数置二十一、余一

置二十一，三三数置七十、余二置一百四十。逾百减百五，余八十六。"这种算法在关孝和《括要算法》中大大改进，在独立工作条件下能达到我国宋时秦九韶所创大衍总数术同等水平。[①]

十　百　鸡　术

《张邱建算经》卷下第38题百鸡术有关解一次不定方程组问题曾风行日本，例如

柴村盛之《格致算书》(1657年)有题："百钱买瓷器三种：茶碗二十钱一个，盆一钱一个，碟一钱一个，问各能买多少？" 答案只列茶碗4个、盆1个、碟19个。原书不列解法。事实上这是具有二个自由度的不定方程组。

礒村吉德《算法缺疑抄》有题："东南西三村收获谷子共一千五百石，折米六百石。已知东村谷子折米五成，南村谷子折米四成，西村折米三成。问：各村收获谷子、折米各多少石？" 原书在题后有答案四组，如表8.2.2。

表8.2.2　《算法缺疑抄》题答

答＼村	1		2		3		4	
	谷(石)	折米	谷(石)	折米	谷(石)	折米	谷(石)	折米
东	500	250	600	300	400	200	300	150
南	500	200	300	120	700	280	900	360
西	500	150	600	180	400	120	300	90

此题较前题难度加深，是具有一个自由度的不定方程组，在众多的整数解中提出四种答案体现了进步。

① 沈康身．秦九韶大衍总数术与关孝和诸约之术，秦九韶与数书九章．北京：北京师范大学出版社，1986

松永良弼《桃李蹊径术》(1763年)以桃花、李花、杏花作算题二十二则，其中第15题说："桃花十一枝值三钱，李花二枝值五钱，杏花七枝值十三钱。已知桃李枝数和与杏枝数相等，又桃、李所值和等于杏花所值。问：各买多少?"问题进一步复杂。

会田安明《诸约混一术》(1784年)有题："梨二文一个，柿一文一个，栗一文五个。今有百文买果子一百个，问：各买多少个?"题后附11组答案，此题正整数解已详尽无遗。

表8.2.3　《诸约混一术》题答

答	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
梨	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
栗	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
柿	91	82	73	64	55	46	37	28	19	10	1

十一　勾　股　术

和算对直角三角形有很多工作。

(一)勾股定理

村濑义益《算学渊底记》① 使用相当于刘徽以盈补虚、出入相补原理作出图证。关孝和在《解见题之法》(1684年)所作图证与我国李潢(? ~1811)《九章算术细草图说》图证相同(图8.2.5)。

(二)类似于《九章算术》勾股章第五题

初坂重春《圆方》(1657年)设有算题："长二丈圆木，木周长三尺五寸，藤自底与木顶绕八周，求藤长。"

(三)斜三角形高

今村知商《竖亥录》有双弦股题，相当于说在图8.2.6中：斜三角形b边(称长弦)在底a(称股)上的射影(称长股是$q=(a^2+c^2-b^2)/2a$。而底上的高(称中勾)$h=\sqrt{b^2-q^2}=\sqrt{c^2-p^2}$。借用这一

① 1681年村濑义益著，后改书名为《算法勿惮改》。

结果就能解决已知三边求三角形面积问题，这已是证明秦九韶三斜求积公式的关键。村濑义益《算学渊底记》对《竖亥录》所列 b 边在底上的射影长作出图证，富中算出入相补传统色彩（图 8.2.7）。

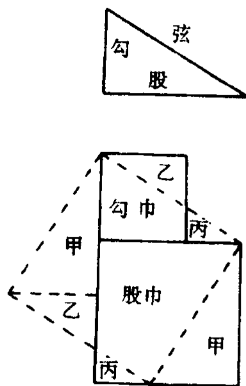


图 8.2.5

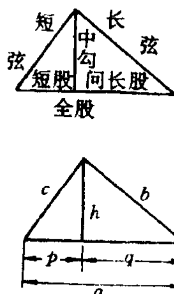


图 8.2.6

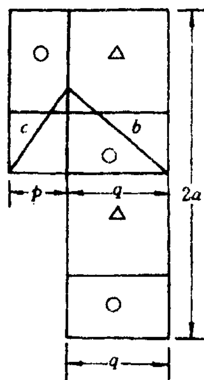


图 8.2.7

他把以 a 为边的正方形分成四块：打上△的正方形（q^2），打上○的长方形二块，还有正方形 p^2。从勾股定理易于得出

$$(b^2-c^2)+a^2=(q^2-p^2)+a^2$$

$$=2(\text{打上△的正方形}+\text{打上○的长方形})$$

$$=2aq。$$

借此易于推出三角形面积是

$$\frac{1}{2}ah=\sqrt{\frac{1}{4}\ \{a^2b^2-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2})^2\}}。$$

关孝和《缺疑抄答术》（1674 年）第二十七题说："今有三斜积八十四寸。只云中斜一尺七寸、小斜一尺。问大斜、中股各几何？答曰：大斜二尺一寸。"说明关孝和对同一问题灵活处理："已知三角形面积反算边长、底上的高（中股）"使研究内容进一步深化。

(四)矢径求弦

关孝和《规矩要明算法》(1663 年)、《格致算书》都记已知直径、矢，求所对应弦长

$$a^2=4c(d-c)$$

与《九章算术》勾股章第 6 题葭生方池题同术。

(五)勾股容圆

《算法缺疑抄》对直角三角形内切圆直径公式有图证与《九章算术》勾股章第 16 题刘徽注同术。

(六)测量

《尘劫记》称间接测量为町见样。和算借用中算测量术例子甚多，例如《算法缺疑抄》有题测树远近，与《九章算术》勾股章第 22 题同义。

十二　圆　周　率

和算所取圆周率，《尘劫记》用 3.16，《竖亥录》用 3.162，《算俎》、野泽定长《童介抄》(1664 年)佐藤正兴《算法根源记》(1669 年)都取 3.14。值得注意的是关孝和《括要算法》求圆周率术，他以直径一尺作圆，然后“容四方、次容八角、次容一十六角……，次第如此，至十三万一千〇七十二角，各以勾股术求弦。以角数相乘之，各得截周。”原书有环矩图(图 8.2.8)可以看出关孝和所谓“各以勾股术求弦”正是《九章算术》圆田刘徽注原意。他算到 $2^{17}=1\ 317\ 072$ 边形所得 $\pi=3.141\ 592\ 653\ 59$ 后，对所得小数用零约术，即我国历法计算常用调日法方法从 3^+，4^- 开始，得到祖冲之疏率 $\frac{22}{7}$ 和密率 $\frac{355}{113}$。

关孝和在论述中，虽然没有运用刘徽圆田注中精辟理论(如有关极限、余径、刘徽不等式等)，但他的工作是刘徽、祖冲之工作的继续是不言而喻的。

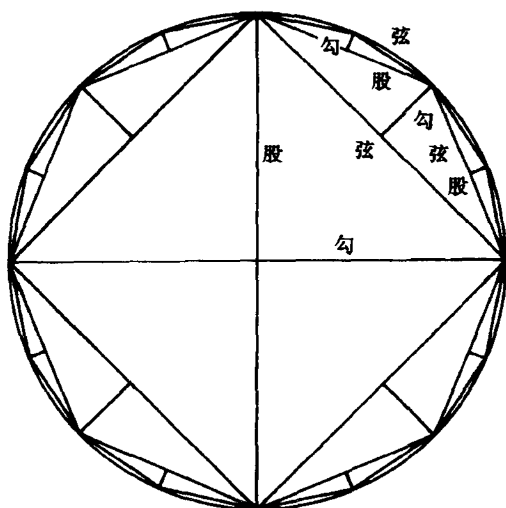


图 8.2.8

十三　立　体　算

《九章算术》商功章很多几何体体积公式在和算前期并没有引起足够重视。直至江户时代才有研究。

(一)方锥

关孝和在《解见题之法》(1684 年)有棋验法证明[①]，解术说："方二分之一为横，方一个为纵，高二分之一为高。三位相乘则方幂，高相乘四分之一，是直堡坊积。……全积八分之一为甲积，全积三十二分之一为乙积。全积之内减甲积一段、乙积四段，余得直堡坊积，则全积四分之三也。" 这儿关氏用出入相补、以盈补虚

① 远藤利贞. 日本数学史. 修订本. 1981. 116

原理(图 8.2.9)把方锥沿半高截面截去顶方锥(甲)，体积为原积$\frac{1}{8}$，又沿顶锥底作垂直截面得四角方锥(乙)，总体积为原积$4\times\frac{1}{32}=\frac{1}{8}$。中间立方体加上四侧堑堵得直方柱(堡垮)，保积为原积$1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$，用高($h$)，方($a$)表示是$\frac{1}{4}a^2h$，因此方锥体积$=\frac{1}{3}a^2h$。

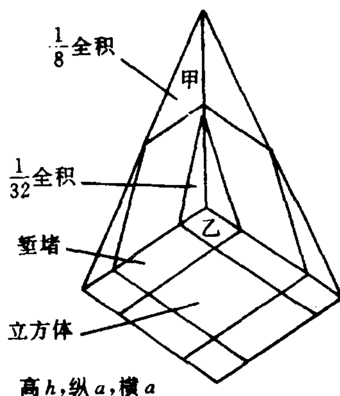


图 8.2.9

(二)方亭

在镰仓时代(1192～1333)计算一升容积(升底正方形底长 a，升口正方形边长 b，高 h 的台体)误以为

$$V=\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2h。$$

直至《尘劫记》仍用此式。《竖亥录》纠正用公式

$$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h。$$

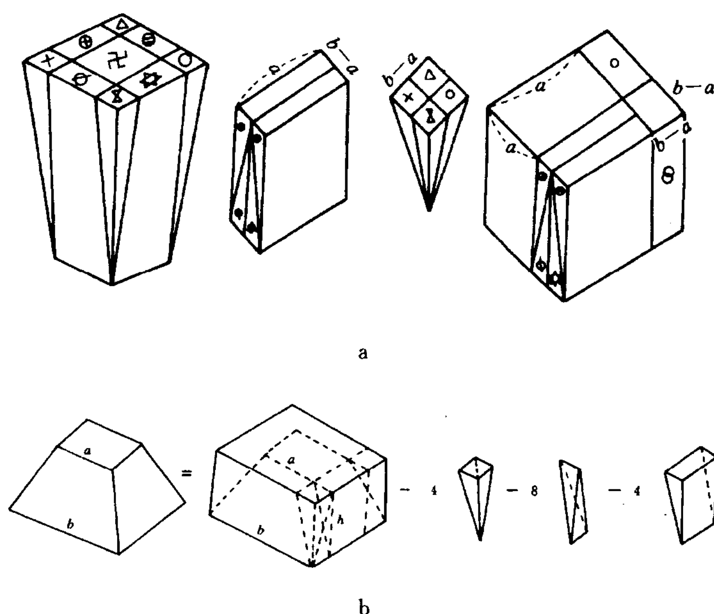
同商功章第 10 题术文、《算学渊底记》有棋验法图证(图 8.2.10a)，合并图中标有相同记号的棋，算得

$$V=b^2h-a(b-a)h-\frac{2}{3}(b-a)^2h$$

$$=\frac{1}{3}\ \{3b^2-3a(b-a)-2(b-a)^2\}\ h$$

$$=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h。$$

这种直接割补方法是创新之作，说明和算家的代数运算已有长足进步。原图含糊，我们另作新图如图 8.2.10b。



a

b

图 8.2.10

(三)榨形(上、中广相等的羡除)

《算法缺疑抄》用棋验法推导体积公式(图 8.2.11)

$$V=\frac{1}{6}(2a+c)bh。$$

（四）厚幅台（刍童）

《尘劫记》误用公式

$$V=\frac{1}{2}(a+a')\times\frac{1}{2}(b+b')h。$$

《竖亥录》用《九章算术》商功章第18题术文相同公式

$$V=\frac{1}{6}\ \{(a+2a')b'+(2a+a')b\}\ h。$$

《算法缺疑抄》用棋验法，把几何体分成上下二榨形。方法简练，为中算所未逮（图8.2.12）：

$$V=\frac{1}{6}(a+2a')b'h+(2a+a')bh$$

$$=\frac{1}{6}\ \{(a+2a')b'+(2a+a')b\}\ h。$$

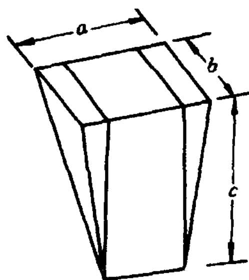


图 8.2.11

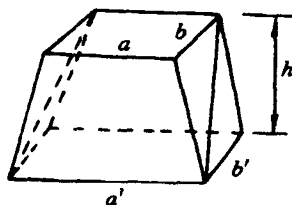


图 8.2.12

十四　会　玉　术

祖暅在《九章算术》少广章立圆术注中有正确球体积公式及其推导，但一直未为和算家理解。他们沉湎于用平行于赤道平面的球台分割，以近似圆台体积和以估计球体积。这种计算方法日本称为会玉术。下面是五种和算书所记计算结果（直径一只球体积立方尺数）：《尘劫记》0.562，《竖亥录》0.510，《格致算书》0.525，

《算组》0.524，与正确值0.523 598 7…相比，精度不高。《算学渊底记》0.523 6。村松茂清在《算组》中说："球率事繁，难以委细记出。可如平圆将串一尺之球，劈成若干枚，达至球心，成各圆台。叠其坪① 数，则可作成寸坪五百二十四之定法也。"

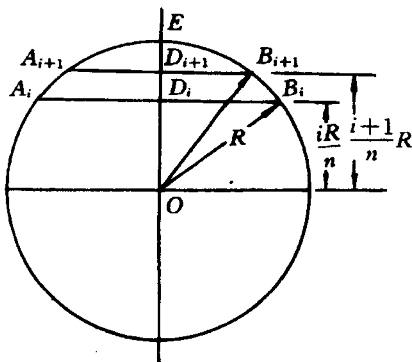


图 8.2.13

十年后村濑义益在《算学渊底记》中说："将一尺之球劈成一万枚……，以径、矢、弦之术，而知其弦。……合一万枚成五百三十坪六分，故为定法也。"村濑所说"径、矢、弦之术"就是《九章算术》勾股章第六题术文。把半径 $OE=R$ 取 n 等分(图8.3.13)从直角三角形，径：$OB_{i+1}=OB_i=R$，矢：D_iE，$D_{i+1}E$，弦：A_iB_i，$A_{i+1}B_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n$. 三者间的关系是

$$D_iB_i^2+(R-D_iE)^2=R^2。$$

把球台看成近似于圆台，当分割数 n 增大，圆台体积和就渐近于球体积。村濑繁重的计算只得到四位有效数字。

尤其令人费解的是三上义夫对中算钻研极深，名重中外。但

① 坪、日语。义：六尺见方面积，这儿转义为平方。

是对祖暅立圆注在其名作《中国和日本数学的发展史》中未见介绍。直至名作出版后 26 年于博士论文[①]中始借助李潢《九章算术细草图说》有详细论述。

和算学习中算的成就最重要的还在于对中算精神本质的掌握是透彻的。例如用出入相补以盈补虚原理处理几何图形，用更相减损术解决通分、约分、解不定方程以及用分数逼近小数，用方程术解线性方程组等，所以个别项目能达到炉火纯青的程度。

① 李俨. 中国算学史，1937

第三章　与同时期印度数学比较

第一节　迄9世纪止中印重要数学典籍及其成就的比较

中国和印度同是数学重要发祥地。东方数学以伊斯兰文化为桥梁，对欧洲数学的兴起曾给予重要影响，这是举世公认的。文化传导自高及低，一如炽热趋冷、江流长东，乃自然规律不易之理。我们比较迄9世纪止中、印两国数学实况为国际文化交流史研究提供线索。

一　迄9世纪止中国和印度主要数学典籍

中国《周髀算经》(前1世纪成书)、《九章算术》(前1世纪成书)、刘徽《九章算术·注》以及《海岛算经》(263年)列《算经十书》之首。《孙子算经》(400年前后)、《张邱建算经》(5世纪下半叶)、《五曹算经》(5世纪下半叶)为继起之作。祖冲之(429～500)父子著作等身，《缀术》虽已失传，所遗创作量少而精，光辉夺目，王孝通《缉古算经》(7世纪)在几何、代数上俱有新见。

印度数学肇源也甚古。惜并无专书谈数学。但从《吠陀》(Veda,前13世纪到前7世纪宗教经典)中可以辑录数学知识多种，自本世纪30年代以来续有汇编出版①。作为数学书专著问世则迟至公元5世纪末。

① 如Datta B. The Science of the Sulba. Calcutta, 1932. 或Sen S N and Bag A K. The Sulbasutras. New Delhi, 1983

阿耶波多(Aryabhata,476～550)[1] 是印度数学家和天文学家,公元476年生于华氏城[2](Pataliputra,今称巴特那),属比哈尔邦。他于499年著《文集》(Aryabhatiya)。此书长期失传,至1864年印度学者勃豪·丹吉(Bhau Daji)获得抄本,始彰于世。《文集》共收诗121首,分颂辞、数学、计时、天球等四章,其中数学章共收诗33首。讨论范围很广泛。

婆什迦罗[3] (Bhaskara,6世纪下半叶)学术活动在伐拉希(Valabhi)一带。他受学于父亲,虽不是阿耶波多及门弟子,但属阿氏学派重要人员。他为《文集》注释。《文集》以及婆氏注释足以代表迄6世纪止印度数学水平。

婆罗摩笈多(Brahmagupta,约598～660)是印度中部印多尔之北乌贾因地方人,乌贾因(Ujjain)是中世纪印度天文、数学活动三大中心之一,婆氏于628年完成其专著《婆罗摩修正历数书》(Brahma-sphuta-siddhanta)。全书有两章(第12章算术,第18章代数)论数学。

摩诃维罗(Mahavira,9世纪)耆那教徒,是南印度迈索尔邦人。著《数书九章》,内容有度量衡制度,记数法,包括0与负数的有理数四则运算、开方和开立方,等差数列和等比数列求和以及解二次方程、勾股数以及不定方程等问题。

我们分记数法、算术、代数、几何四方面比较迄9世纪止中国和印度数学发展情况。

---

① 公元10世纪时又有同名印度数学家. 为示区别,《文集》作者,被称为阿耶波多一世,本文则称为阿耶波多。

② 唐玄奘《大唐西域记》称华氏城。

③ 12世纪时又有同名印度数学家. 为示区别《文集·注释》作者称为婆什迦罗一世,本章称为婆什迦罗。

（一）记数法

阿Ⅱ 2①所记十进记数法我国早已采用。九章Ⅰ32刘徽注最大数达二千六百七十九亿余。孙Ⅰ，又有大数命名法："凡大数之法，万万亿曰兆，……，万万正曰载。"从亿开始则以万万进。印度记数法对我国记数命名在一定范围内有影响。②

（二）算术

1. 分数　关于通分法则阿Ⅱ 27与九章Ⅰ8合分术相同。两国同样没有最小公倍数概念，以分母互乘取作公分母。九章Ⅳ进一步提出以最小公倍数取作公分母的方法。《张邱建算经》序对通分十分注重，说："夫学算者不患乘除之为难，而患通分之为难。"并提出具体通分法则。

至于分数除法阿Ⅱ 27所措词，九章Ⅰ17经分术已有记述，经刘徽注后益臻明确。《张邱建算经》又以进一步复杂的算题进行运算，如

$$1768\frac{4}{7}\div 27\frac{3}{5}=64\frac{38}{483},\ （张Ⅰ,5）,$$

$$\left(6587+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)\div 58\frac{1}{2}=112\frac{437}{702},\ （张Ⅰ,6）。$$

孙Ⅲ17，张Ⅱ37都有"盪杯"题③，这是要用分数除法才能解决的问题。

2. 三率法　阿Ⅱ 26只具法则，余未置一词，印度三率法即中国今有术。《九章》设专章（粟米）讨论，又以此术处理其余各章有

---

① 我们简记《阿耶波多文集·数学》第2节为阿Ⅱ 2。下文又以周髀、九章、孙、张、五曹、缉古依次作为《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、《缉古算经》简记记号、后记罗马数字、阿拉伯数字分别作为卷号和题号。《阿耶波多文集·数学》1～33节见本《大系》副卷第一卷。

② 沈康身．中国与印度在数学发展中的平行性．中国数学史论文集（一）．1985

③ 参见本《大系》第二卷第四编第六章第六节第2题。

关问题，可谓极其熟练。《孙子算经》、《张邱建算经》俱有复述，并另拟新题。

3. 开平方和开立方 《九章》有整数及分数开平方、开立方法则，刘徽还作出几何解释。《孙子算经》、《张邱建算经》所述运算法则更为周到。阿Ⅱ4，5仅列运算法则，在阿Ⅱ5中又漏去一句“从第二个非立方位减去立方根以及三倍商的乘积。”

4. 负数及其运算 九章Ⅷ及其刘徽注系统论述了有理数加减运算，婆罗摩笈多在其《婆罗摩修正历书》第18章有进一步论述，居当时世纪最先进水平。[①]

5. 无理数及其运算 九章Ⅳ及其刘徽注有定性论述及个别运算例，《婆罗摩修正历书》第18章有进一步论述，对平方根的四则运算已有系统公式。[②]

6. 逆推法 三国刘徽先于阿Ⅱ28在注九章Ⅶ20时作为双假设法的辅助手段，最先提出逆推法。张Ⅱ17：“今有人持钱之洛，贾利五之二。初返归一万六千，第二返归一万七千，第三返归一万八千，第四返归一万九千，第五返归二万。凡五返，归本利俱尽。问本钱几何？”[③]张邱建用逆推法解题[④]，却把双假设法看成辅助手段。

7. 行程问题 阿Ⅱ31相当于说甲乙两运动体相距d，速度分

---

① 见本《大系》副卷第一卷《婆罗摩修正历书》选译。

② 见本《大系》副卷第一卷《婆罗摩修正历书》选译。

③ 如设本钱为x，题意是

$$((((x(1+\frac{2}{5})-16\ 000)\ (1+\frac{2}{5})-17\ 000)\ (1+\frac{2}{5})18\ 000)(1+\frac{2}{5})-19\ 000)(1+\frac{2}{5})-20\ 000=0。$$

④ 张邱建逆推法相当于说

$$x=((((2\ 000\times5+19\ 000\times7)\times5+18\ 000\times49)\times5+17\ 000\times343)\times5+16\ 000\times2\ 401)\times5\div16\ 807。$$

别为 v_1，v_2 在相同时刻出发。如为相向运动则在出发前（如背向）后（如面向）

$$t=\frac{d}{v_1+v_2}\text{（单位时间）}$$

相遇。如为同向运动则在出发前（后）

$$t=\frac{d}{v_2-v_1}\text{（单位时间）}$$

相遇。

九章Ⅵ12～14 犬兔问题都是同向运动问题。九章Ⅵ19 良马、驽马为相向运动，但还进一步考虑加速度、减速度因素。九章Ⅵ16："今有客马日行三百里，客去、忘持衣。日已三分之一，主人乃觉。持衣追及，与之而返。至家视日四分之三。问主人马不休，日行几何？"在同一问题中出现同向、背向，而且问题变化层次多。已知条件为时间、距离，所求的是速度。及公元 6 世纪，张Ⅰ16，张Ⅱ2～5 都是新拟的行程问题。《缉古算经》第 1 题又以行程问题驭天象现象求月的位置。

8. 应用题　本《大系》第二卷第四编全面论述九章十分广泛的设题题材。其中多次与摩诃维罗《数书九章》所命题相对应，说明印度数学教育家也关注同一课题，以提高学习兴趣。

（三）几何

1. 规、矩、准、坠　阿Ⅱ13 记载印度古时作图法，以水验平，以铅直线取得垂线的做法。

我国作方、作圆工具肇源甚古。甲骨文已有规字[illegible]，像手执规画圆。矩字作 [，像两个直角，又金文矩字[illegible]，像人持矩。《周官考工记·舆人》："圆者中规，方者中矩，立者中悬，衡者中水。"又《匠人》"水地以悬，置槷以悬，眠以景为规。识日出之景与日入之景。昼参诸日中之景，夜考之极星以正朝夕。"辑注说："槷、犹臬，即表也。以悬者，悬绳以正其臬也。臬正则景正。规、

画地以成圆，而中置臬也。识者谓视某景之交规处以识其端，而东西既正。又取交相距中，屈之以指臬，而南北亦正也。然犹恐未审，又昼参诸日中尺五之景，夜考诸北辰极星之中，然后南北无复疑，而东西更无不定也，朝夕即东西。”解释很中肯。在水准测量方面除了定性叙述外，在唐宋时代又有水准仪问世以及定量测水准方法，成为军事、水利等工程重要准备工作。[①]

2. 平面图形

(1)正六边形边长 阿Ⅱ9有关于圆内接正六边形边长的正确命题，九章Ⅰ32刘徽注已有论说：“假令圆径二尺，圆中容六觚之一面与圆径之半，其数均等。”

(2)面积 阿Ⅱ6～8对三角形、梯形、圆面积公式有正确叙述。阿Ⅱ9还论及一般平面图形面积计算方法。在中国，九章Ⅰ刘徽注提出出入相补原理，使一般图形变换为长方形有划一计算方法[②]。至南北朝又新增命题如已知对角线求正方形面积(孙Ⅱ14)。又腰鼓田(五曹Ⅳ5)，蛇田(五曹Ⅳ8)，箫田(五曹Ⅳ10)，四不等田(五曹Ⅳ14)等都折成长方形后取近似公式。

(3)勾股定理 阿Ⅱ14提出勾股定理，无证。周髀、九章俱有此结果、三国赵爽、刘徽并有证法。九章Ⅸ详论勾股和、差等问题，在三国时代为勾股术奠定了雄厚基础[③]。阿Ⅱ17圆内弦、矢公式有术无例、无证。九章Ⅸ6通过“池方一丈，葭生其中央”例题丰富了术文，刘徽对公式还作出证明。张Ⅰ13，张Ⅲ3又以此公式解新设算题。王孝通又多次深入研究以解高次方程。

(4)正弦表 阿Ⅱ11提出等分圆周从而计算有相等间隔角度的正弦。婆什迦罗所举例详示具体计算手续。其第三例列出第一

---

① 沈康身. 中国古代测量技术的成就，科学史集刊，1965(8)

② 吴文俊. 出入相补原理.《九章算术》与刘徽. 1982

③ 白尚恕.《九章算术》与刘徽的几何理论.《九章算术》与刘徽. 1982

象限内每隔 3°45′二十四个角的正弦表。8 世纪时来华印僧瞿昙悉达所译《九执历》(718 年)即采用此表①。对婆什迦罗工作与刘徽相应工作作一比较不难发现前者与九章Ⅰ32 刘注所取计算过程全相一致:“先求弧所对矢长,然后从半弦、矢长求半弧所张弦长。”

(5)相似三角形　阿Ⅱ13 以水验平,用铅坠线验垂直,阿Ⅱ14 婆什迦罗注释又对标杆的制造作细致描写。这些无疑对阿Ⅱ14～16 三个测量问题在工具准备上创造必要条件。九章Ⅸ22～24 为相似三角形对应边成比例原理应用于间接测量算题。《海岛》第 9 题又提出进一步复杂的测量问题②。在南北朝数学文献中:阿Ⅱ15 适与孙Ⅲ25:“今有杆不知长短,度其影得一丈五尺。别立一表,长一尺五寸影得五寸,问杆长几何?”同义。而阿Ⅱ16 与张Ⅰ14③ 同义。王孝通《缉古算经》多次运用相似勾股以解决各种截面中线段及面积问题。

尤其值得引人注意的是阿Ⅱ14 中婆什迦罗注释:从标杆长及影长测当地纬度角与周髀Ⅰ测影术有异曲同工之妙。周官大司徒④ 职:“夏至日中立八尺之表,其影尺有五寸,谓之地中。”从此历代都有八尺长标杆夏至、冬至中午日影长记录,正如已在前文所述中国古代有可靠测量工具因此所测日影有很好结果,经近代验算,从这些日影记录推算当地纬度(φ)及当时黄赤交角(ε)有较好精度⑤。

(6)圆周率　阿Ⅱ10 所记圆周率是 3.141 6,记录弥足珍贵,

---

① 李俨. 瞿昙氏历. 中国古代数学史料. 中国科学图书仪器公司, 1954

② 吴文俊.《海岛算经》古证探源.《九章算术》与刘徽. 1982

③ “今有木,不知远近、高下。立一表高七尺,人去表九步立,望表头适与木邪平。人目去地七尺二寸。又去表三十步,薄地遥望表头,亦与木端邪平。问木去表及高几何?”

④《周礼·地官》。

⑤ 陈美东. 试论我国古代黄赤交角的测量. 科技史文集. 1978(3)

惜未说数据来源。九章Ⅰ32刘注则用勾股定理，详细计算，列中间过程[①]，又指出如计算到圆内接1 536边形可得圆周率 $\frac{3\ 927}{1\ 250}=3.141\ 6$。阿耶波多的同代人中国数学家祖冲之(429～500)更进一步计算得到圆周率 π

$$3.141\ 592\ 6<\pi<3.141\ 592\ 7。$$

3. 空间形体 阿Ⅱ6所论三棱锥体积作为三角形面积公式的推广，取 $V=\frac{1}{2}Ah$，误。又阿Ⅱ7球体积作为圆面积公式的推广[②]，取 $V=\sqrt{\pi R^2}\cdot\pi R^2=\pi^{\frac{3}{2}}R^3$，误。九章Ⅴ15早有阳马公式 $V=\frac{1}{3}Ah$。九章Ⅳ24有球体积公式 $V=\frac{9}{16}(2R)^3=\frac{9}{2}R^3$，精度高于阿Ⅱ7。祖冲之父子对球积公式有正确推导[③]。《孙子算经》、《张邱建算经》在几何体体积计算题出现多次，后者对有关算题又有新意：从体积公式提出反求问题：

“今有筑墙，上广二尺、下广六尺、高二丈。今已筑上广三尺六寸，问已筑高几何？”[④]

“今有方锥，下方二丈，高三丈。欲斩末为方亭。今上方六尺，问斩高几何？”

五曹Ⅳ平地聚粟、内角聚粟、半壁聚粟与九章Ⅴ23～25同义。又另拟外角聚粟与12世纪婆什迦罗二世《丽罗娃祇》题同义。[⑤]王孝通《缉古算经》所论立体进一步复杂，例如一般堤形公式可以

---

① 白尚恕. 刘徽对极限理论的应用.《九章算术》与刘徽. 1982

② 有可能从圆面积 πr^2，把圆看成边长为 $\sqrt{\pi r^2}$ 的正方形。阿耶波多以为球是边长为 $\sqrt{\pi r^2}$ 的立方体，于是得出所示公式(据Shukla K S英译本注)。

③ 白尚恕. 刘徽对极限理论的应用.《九章算术》与刘徽. 1982

④ 张Ⅰ8。

⑤ 沈康身.《丽罗娃祇》与《数书九章》，秦九韶与《数书九章》. 1987

经受近代数学检验而无可指责。[1]

（四）代数

1. 线性方程　阿Ⅱ30提出特殊线性方程解公式，阿Ⅱ30又提出一特殊线性方程组解公式。九章Ⅷ方程术则对一般线性方程组给出解法，等价于现代所用矩阵初等变换方法解线性方程组。张Ⅲ13～15都是三元线性方程组问题，都是用方程术解得出正确答案。孙Ⅱ26“今有甲、乙、丙三人持钱，甲语乙、丙，各将公等所持钱半、以益我钱，成九十。乙复语甲、丙，各将公等所持钱半、以益我钱，成七十。丙复语甲、乙，各将公等所持钱半、以益我钱，成五十六。问三人原持钱各几何？”我们如设甲、乙、丙原持钱分别为x，y，z，题意是解方程组

$$\begin{cases} x+\dfrac{y+z}{2}=90(a), \\ y+\dfrac{x+z}{2}=70(b), \\ z+\dfrac{x+y}{2}=56(c)。\end{cases}$$

《孙子算经》不用方程术，而是借助于公式

$$x=\frac{3}{2}a-\frac{b}{2}-\frac{c}{2},\ y=\frac{3}{2}b-\frac{a}{2}-\frac{c}{2},\ z=\frac{3}{2}c-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}。$$

2. 数列　阿Ⅱ记载数列算法多种：算术数列，求和公式（Ⅱ19），求项数公式（Ⅱ20）；拟形数，三角形数（Ⅱ21）；自然数幂和，正方形数（Ⅱ22），立方形数（Ⅱ23）。

我国关于算术数列的系统研究以《张邱建算经》最为详尽。关于拟形数的研究起点较迟，自从杨辉《详解九章算法》（1279年）开始至朱世杰《四元玉鉴》（1303年）集其大成而发扬光大，但已迟于阿Ⅱ七八个世纪。

---

① 沈康身．拟柱体与中国堤积公式．数学通报，1963(9)

3. 二次方程　阿Ⅱ20，24，25都论述二次方程。《婆罗摩修正历书》第18章又给出二次方程求根公式[①]。比较这一课题的中、印发展是饶有兴味的。

我国最先在九章Ⅸ20从测量问题引进二次方程，而阿耶波多的同代著作张Ⅱ22："今有弧田，弦六十八步、五分步之三，为田二亩三十四步、四十五分步之三十一。问矢几何？"原题术文相当于设矢长 x 解方程 $x^2+68\frac{3}{5}x=1029\frac{13}{45}$。

关于已知两数差、积求两数这一公式，三国时赵爽、刘徽已有相同论述[②]。

唐时天文学家僧一行(683～727)也是从等差数列中已知前 n 项和、首项、公差反求项数时提出二次方程求根公式[③]。时间上已迟于阿耶波多200年，但公式兼及递增与递减情况。

4. 高次方程　王孝通《缉古算经》以几何手段引进三次方程和四次方程。前者各项齐全，后者为双二次方程。这是数学史中的创举。比较起来印度数学较为逊色[④]。

5. 不定方程　阿Ⅱ32～33是解一次同余组的一般方法是古世界杰出的成就。

我国古代由于历法需要，在公元2世纪时已有须用一次同余式知识解决的天文问题[⑤]。孙Ⅲ26："今有物，不知其数。三三数之，剩二。五五数之，剩三。七七数之，剩二。问物几何？"所提问题虽无天文内容，但脱胎于天文是可信的。今称

$$x\equiv r_i \pmod{m_i},$$

---

① 参见本《大系》副卷二婆罗摩笈多《婆罗摩修正历书》选译。

② 沈康身. 读《九章算术·刘徽注》新议. 自然科学史研究，1986(2)

③ 李迪. 二次方程求根公式的历史. 数学通报，1962(9)

④ 沈康身. 王孝通开河筑堤题分析，杭州大学学报，1962(1)

⑤ 李文林，袁向东. 论汉历上元积年的计算. 科技史论文集. 1978(3)

$$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ (m_i,m_j)=1,\ 1\leqslant i<j\leqslant n。$$

的解是

$$x\equiv\sum_{i=1}^{n}M_ir_iF_i(\bmod M),$$

其中 $M_iF_i\equiv 1(\bmod m_i)$，$M_i=M/r_i$，$M=\prod_{i=1}^{n}m_i$ 为孙子定理或中国剩余定理。这是推崇孙Ⅱ26 在时间上领先于阿Ⅱ32～33 一百年，也推崇它既有答案也有推导线索，要言不烦，可以以此作为有效方法解同类问题。关于

$$M_iF_i\equiv 1(\bmod m_i)$$

的一般解法我国到秦九韶《数书九章》(1247 年)才公开发表[①]。

《阿耶波多文集》成书之前张Ⅱ38 提出了著名的百钱百鸡问题，相当于解

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\5x+3y+\dfrac{z}{3}=100。\end{cases}$$

这一问题为有三个未知数的不定方程。限于代数变换技术不是印度粉碎法所能解决。这种类型问题印度直到摩诃毗罗算书中才有涉及："五鸽三钱，七鸡五钱，九鹅七钱，三孔雀九钱。有百钱买百鸟，问各多少？"[②]

婆罗摩笈多《婆罗摩修正历书》第 18 章论代数。他在不定分析上率先研究了二次方程 $y=Nx^2+1$(N 为完全平方数)，并得到许多结果，今称婆罗摩笈多结论。这一领域内的突破则优于中国。

以本时期印度最早知名数学典籍《阿耶波多·数学》而论，其

---

① 李继闵．大衍求一术释．秦九韶与数书九章．1987

② 见《大系》副卷第一卷摩诃维罗《数书九章》选译。

数学内容覆盖至为广泛，唯中算可以一一作出相应对照。其中部分成果如正弦表、相交圆矢长、不等边三角形两边在第三边上射影计算等为中算空白点。总体而言，在时间先后上、在研究深度、广度以及所取得成果的质量上，我国数学业绩遥遥领先，自不待言。此外迄 9 世纪止，我国数学研究项目中许多已很成熟，而印度数学无所反映者也比比皆是，例如线性方程组一般解法、盈不足术、各种立体求积公式、各种勾股问题等等。中国数学典籍在每一命题叙述前后都有丰富例题佐证；而早期印度文献偏重理论，叙述也过于简陋，如无后人注释很难通其义，此又是另一特点。

第二节 印度传入中国的数学

一 婆罗门与《九执历》中的数学

南北朝到隋唐时期，从印度和中亚传入中国的数学，内容丰富，而且传进的方式也有所不同，大体上都和宗教有关。

在印度和中亚流行的宗教，最早的可能是吠陀教(Vedism)，约在公元前 1500 年左右从伊朗地区进入印度讲印欧语各民族所信仰的宗教，后来由吠陀教演变成印度的婆罗门教(Brahmanism)。婆罗门一词又代表僧侣的意思，在梵文中 Brahmana 的原意为神学的掌握者。吠陀教和婆罗门教又都成为印度教的派别。还有说婆罗门是印度的一个学派①。

公元前 6 世纪，有佛教和耆那教(Jainism)在印度兴起，与印度教成为印度的三大宗教。

这些宗教都有自己的经典，尤其佛教经典传播更广。传播到中国的宗教经典，从名称上即可看出有些不属于佛教，传播的路

① 江晓原. 天学真原. 沈阳：辽宁教育出版社. 1995. 360

线也不一样，有些是从中亚进入中国的，译经者除印度人外还有罽宾人等。许多印度的天文历算知识伴随着宗教经典或少量专门的历算著作被译成了中文。

最早在中国传播的是《七曜历》，大约从东汉末起就有此种历法。南北朝到隋唐时在中国颇为流行。在《隋书》就记有22种之多，从名称看，如《陈天康二年七曜历》等[①]，说明当时在一些王朝实行过《七曜历》。还有《七曜历数算经》等直接与数学有关。遗憾的是，这些书都未流传下来，因而对它们的具体数学内容无法得知。

还有一批以“婆罗门”命名的天算著作，它们是：

《婆罗门天文经》21卷［婆罗门舍仙人所说］，

《婆罗门竭伽仙人天文说》30卷，

《婆罗门天文》1卷，

《婆罗门算法》3卷，

《婆罗门阴阳算历》1卷，

《婆罗门算经》3卷[②]。

这些著作显然不属佛教系统，应是婆罗门教或婆罗门学派的作品，其中所载之天算内容当与佛教无关。它们肯定是用中文写成或译成，中国人能够阅读。隋炀帝于604年即位后，命人把秘阁藏书各抄写50部副本，藏于洛阳观文殿。建唐以后于武德五年（622年），通过水路由黄河经渭水往长安搬运，结果船行到底柱时“多被漂没，其所存者，十不一二”，连目录都被弄湿[③]。唐代编隋代“经籍志”时，就是利用这份幸存下来的目录。可见在目录中包括上引6种婆罗门著作，而书籍则在黄河漂没，无一幸存。但

① 《隋书》卷三十四“经籍三”。

② 《隋书》卷三十四“经籍三”。

③ 《隋书》卷三十二“经籍志一”。

是无论如何，这是中外数学交流史上必须提及的一件事。

隋唐时期在中国传播印度天算、又留下内容的当属瞿昙氏家族。这个家族是什么时候、从何处来到中国？目前还不清楚。1977年在陕西省长安县北田村出土了瞿昙譔墓志①，为研究瞿昙氏家族提供了第一手资料。

瞿昙譔是墓主人，他去世于唐大历十一年，享年65岁(712～776)，是所涉瞿昙氏的第四代，墓志还包括他的六个儿子。这些人中有些在唐代天文机构工作，现据已有资料及参考他人工作，列表于下：

瞿昙逸(“高道不仕”)

↓

瞿昙罗(665～698年断续，太史令)

↓

瞿昙悉达(712～约718年，太史监)

↓

瞿昙谦

瞿昙譔(712年后在太史局工作，后被调出，758～?，秋官正)

↓

瞿昙昇

瞿昙昪

瞿昙昱

瞿昙晃

瞿昙晏(冬官正)

瞿昙昴

可以说是天文世家，一连四代在国家天文机构担任领导或重要职务，中国历史上还不多见。

---

① 晁华山．唐代天文学家瞿昙譔墓的发现．文物，1978，(10)：49～53

在墓志中有“发源启祚，本自中天，降祉联华，著于上国，故世为京兆人也。”明确说明瞿昙氏家族来自中天竺，因行文中采取四字为一句，故把“本自中天竺”省略为“本自中天”，在当时不会发生误解。瞿昙氏从中天竺到中国定居于长安，如从瞿昙逸起算，到瞿昙谦时已有四代，长达百年以上，说“故世为京兆[1]人也”完全有道理。以此推之，瞿昙逸当于唐初到中国的，在他之前不会再有先代人定居于长安。

在上述11人中，第三代、亦即瞿昙谦的父亲瞿昙悉达最重要和最有名。开元六年(718年)他奉皇帝李隆基之命翻译《九执历》[2]，同时又开始编辑《开元占经》一书，几年之后完成，全书120卷。

《九执历》是印度的一种历法，所谓“九执”是指日、月、五大行星和两个“隐星”罗睺、计都，也称“九曜”。罗睺和计都根本不是星，实际上是天球上白道和黄道的两个交点。瞿昙悉达所译《九执历》是什么样子，因原书早已失传，无法详知，在《新唐书》中有一段极简单，但又扼要的记载，最后有贬义性的评语：

“九执历者，出于西域。开元六年，诏太史监瞿昙悉达译之。断取近距，以开元二年二月朔为历首。度法六十。月有二十九日，余七百三分日之三百七十三。历首有朔虚分百二十六。周天三百六十度，无余分。日去没分九百分度之十三。二月为时，六时为岁。三十度为相，十二相而周天。望前曰白博义，望后曰黑博义。其算皆以字书，不用筹策。其术繁碎，或幸而中，不可以为法。名数诡异，初莫之辨也。”[3]

---

① “京兆”之名起于唐代，开元元年(713年)改雍州置京兆府，辖境较广，治所在长安(今西安市)。瞿昙氏不会居住外县，应在长安。

② 《新唐书》卷二十八下“历志四下”。

③ 《新唐书》卷二十八下“历志四下”。

其中在数学方面有：圆周分为360度，每度为60分，以及笔算。不过，都未详细解说。在《开元占经》中的第104卷"算法"，主要讲《九执历》，无疑是他的译本或一部分。该卷开头说："臣等谨按，《九执历法》梵天所造，五通仙人承习传授。……今削除繁冗，开明法要，修仍旧惯，缉缀新经，备列算术，目标如左，自作口诀，亦题目附本章。"这就说明，是把译本《九执历》经过削冗、增加新作的口诀，并按原来的样子加进了《开元占经》。从内容上看，与《新唐书》所说相符合。

《开元占经》卷104正文的第一项是"算字法样"，现传本未写出"样"字，只是用小注的形式给出：

一字　二字　三字　四字　五字　六字　七字　八字　九字

加上"点"字，然后说：

"右天竺算法用上件九个字乘除，其字皆一举札[①] 而成。凡数至十进入前位，每空位处恒安一点。有间咸记，无由辄错，运算便眼，……"

其中的九个字和一个点是指印度数码，点相当于零。

书中把周天分为360度，又分为12相，每相30度，又每象限被分为24段，每段3°45′，合为3相。

《开元占经》卷104中最重要的数学内容是给出一份相当于正弦函数表的数表，但是间隔较大，有一个小项目叫做"推月间量命"，原文是：

"推月间量命　段数：凡一段管三度四十五分，每八段管一相，总有二十四段，用管三相，其段下侧注者，是积段并成之[②] 数。

第一段　　二百二十五；

第二段　　二百二十四，并四百四十九。

---

① "札"，有的版本误为"礼"。

② "之"，传本误为"三"，依意校改。

第一相
第三段　二百二十二，并六百七十一；
第四段　二百一十九，并八百九十；
第五段　二百一十五，并一千一百五；
第六段　二百一十，并一千三百一十五；
第七段　二百五，并一千五百二十；
第八段　一百九十九，并一千七百二十九；
第九段　一百九十一，并一千九百一十；
第十段　一百八十三，并二千九十三。
第二相
第十一段　一百七十四，并二千二百六十七；
第十二段　一百六十四，并二千四百三十一；
第十三段　一百五十四，并二千五百八十五；
第十四段　一百四十三，并二千七百二十八；
第十五段　一百三十一，并二千八百五十九；
第十六段　一百一十九，并二千九百七十八；
第十七段　一百六，并三千八十四；
第十八段　九十三，并三千一百七十七。
第三相
第十九段　七十九，并三千二百五十六；
第二十段　六十五，并三千三百二十一；
第二十一段　五十一，并三千三百七十二；
第二十二段　三十七，并三千四百九；
第二十三段　二十二，并三千四百三十一；
第二十四段　七，并三千四百三十八。”

引文开头所说“凡一段管三度四十五分”，即每段为3°45′，亦即间隔为3°45′。从第一段开始到第二十四段，度数为从3°45′到90°，合为三相。表中的2个数字前一个为前后二段之差数，而“并”为

本段之差数与前段"并"之和。相当于如下的正弦函数表

表 8.3.1　正弦函数表

段数	角度 α	$3\ 438\sin\alpha$	差数
一	3°45′	225	
二	7°30′	449	224
三	11°15′	671	222
四	15°	890	219
五	18°45′	1 105	215
六	22°30′	1 315	210
七	26°15′	1 520	205
八	30°	1 719	199
九	33°45′	1 910	191
十	37°30′	2 093	183
十一	41°15′	2 267	174
十二	45°	2 431	164
十三	48°45′	2 585	154
十四	52°30′	2 728	143
十五	56°15′	2 859	131
十六	60°	2 978	119
十七	63°45′	3 084	106
十八	67°30′	3 177	93
十九	71°15′	3 256	79

续表

段数	角度 α	3 438sin α	差数
二十	75°	3 321	65
二十一	78°45′	3 372	51
二十二	82°30′	3 409	37
二十三	86°15′	3 431.	22
二十四	90°	3 438	7

在表中有 2 个数，即 225 和 3 438 的来历需要加以说明，否则所有其他计算和结果都是没有根据的。

前已述及，印度古代采用每度为 60′的制度，因此有 3°45＝180′＋45′＝225′。

3 438 由半径长度化得，即

$$2\pi r=360\times 60，(\pi=3.1416)。$$

由此有

$$r=\frac{360\times 60}{2\pi}=3\ 437.738\ 7=3\ 438。$$

在图 8.3.1 中，当 r，α 已知，求 h 时，则有

$$h=r\sin\alpha \text{ 或 } \sin\alpha=\frac{h}{r}。$$

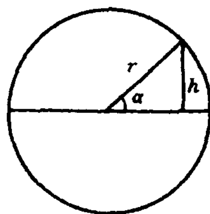


图 8.3.1

用现代方法进行验算，结果相当精确。

在给出以上的 24 个数值的基础上，可求其某相邻两度间的某度 h_p 的正弦线段值，叫做“月间量命”。但是不再用正弦函数，而是用已有相关数值，通过一次插值法求得。下面按书上提及的举 2 例：

例 1　求 10°的正弦线段 $h_{10°}$。检表得其前 7°30′的正弦线段为

449，差数为 222，于是有

$$10°-7°30'=2°30'=150',$$
$$11°15-7°=3°45'=225'。$$

故

$$h_{10°}=449+\frac{150}{225}\times222=449+148=597。$$

例 2　求 13°45′的正弦线段 $h_{13°45'}$。检表得其前 11°15′的正弦线段为 671，差数为 219，于是有

$$13°45'-11°15'=2°30'=120',$$
$$15°-11°15'=3°45'=195'。$$

故

$$h_{13°45'}=671+\frac{150}{225}\times219=671+146=817。$$

例 1 相当于 $h_{10°}=3438\sin 10°=597$，例 2 相当于 $h_{13°45'}=3\,438\sin 13°45'=817$。用这个方法可求出由 0°到 90°间的任何一个角度的正弦线段。

设 W 为每段之长度(均为 3°45′=225′)，h_1，h_2 分别所选段(间隔)的初端、末端的正弦线段，其对应的度数为 p_1，p_2 而 Δ 为末段差，p 为所选之度数，而 $p_1<p<p_2$。则上面两例的计算程序可归纳成如下的一般形式

$$h_p=h_1+\frac{p-p_1}{W}\Delta,$$

这是一个等间距一次插值公式。

我们已在本章第一节介绍印度天文学家数学家阿耶波多(Aryabhata，476～?)一世于 499 年完成的《文集》，主要讲天文学和数学问题。其中第二章数学第 11 节为“半弦表”，也是把四分之一圆周分为 24 等分，以“秒”为单位，第 12 节给出了 24 个差值：“二二五、二二四、二二二、二一九、二一五、二一〇、二〇五、一九九、一九一、一八三、一七四、一六四、一五四、一四

三、一三一、一一九、一〇六、九三、七九、六五、五一、三七、二二、七。”与《开元占经》所记完全一致，但早于《开元占经》200多年。至于《开元占经》中的“九执历”与《阿耶波多文集》有何关系，看不出来，对照两者知它们差别甚大，不过“九执历”24段之说应来自《阿耶波多文集》。因此可以说，阿耶波多的某些数学成果在唐代已传入了中国。

二　随印度佛经传入中国的记数法

印度佛教经典早在东汉即开始传入中国，并陆续译成中文，南北朝时期有不少译经问世，到唐代可以说达到鼎盛阶段。

中译本印度佛经中包括不少有关大小数记法和记年法，以下分别予以介绍。

（一）小数记法

三国时康僧铠译的《佛说无量寿经》卷上已有“百分”的记载，“百分”实即百分之一。东晋时北天竺佛陀跋陀罗（359～429）在所译《大方等如来藏经》中更有“百分不及一，千分不及一，乃至算数譬喻所不能及。”在南北朝刘宋时罽宾[①]的昙摩密多（356～442）译的《佛说诸法勇王经》中除了百分、千分之外，还有“百千亿分”，这实际是个形容词，而不是普通数词。

与东晋同时并存的后秦有一位从印度来的鸠摩罗什（344～413）在所译经书中也记载了较多的小数记法，有百分、千分、百千亿分[②]、百千万亿分[③]、千万亿分[④]以及千万亿那由他分[⑤]等。北凉的天竺昙无忏（394～433）与刘宋的中天竺求那跋摩罗（394～

① “罽宾”，古西域国名，位于今克什米尔一带。“罽”音计jì。

② 《佛藏经》卷三。

③ 《妙法华莲经》卷五。

④ 鸠摩罗什（译）《大智度论》卷四十五。

⑤ 《妙法华莲经》卷五。

468)译的《菩萨地持善戒经会译》中也有百分、千分和百千万分等记载。

关于小数记法有系统的记载是《大宝积经》。本经由在东魏的中天竺月婆首那于兴和三年(541 年)首译，北周天和六年(571 年)由阇那崛多再译，唐时南天竺人菩提流支于神龙二年(706 年)开始到先天二年(713 年)第三次翻译，共 120 卷。此外，在唐代还有他人如玄奘(600～664)等都翻译过《大宝积经》①。每种译本都有大量的小数记法记载，其中以首译本最为详细，载于该译本卷 88 和 89。所记小数有：百分、千分、百千分、亿分、百亿分、千亿分、百千亿分、那由他分、百那由他分、千那由他分、百千那由他分、亿那由他分、百亿那由他分、千亿那由他分、百千亿那由他分、阿僧祇分、算分、数分、譬喻分、不可数分等 20 种小数，但从进位看，中间有缺位。

在月婆首那的另外译经中② 也有关于小数的记载：百分、千分、百千万分、百千万亿分和百千万亿恒河沙分等。

在唐代的译经中仍有大量小数记法，例如罽宾的般若所译《大方广佛华严经入不可思议解脱境界普贤行愿品》及《大乘理趣六波罗密经》卷四(788 年)、玄奘译《地藏十轮经》卷五以及裴休译《裴相发菩提心文·次明发菩提心功德》等等，均有。为明晰起见列表 8.3.2。

表 8.3.2　小数记法

大方广佛华严经	裴相发菩提心文	地藏十轮经	婆罗密经
百分	百分	百分	百分
千分	千分	千分	千分

① 李俨. 中国古代数学史料. 北京：中国科学图书仪器公司，1954. 168～169

② 月婆首那(译)《胜天王般若波罗密经》卷二、四和七。

续表

大方广佛华严经	裴相发菩提心文	地藏十轮经	婆罗密经
			万分
	百千分	百千分	
	亿分		亿分
	百亿分		
	千亿分		
	百千亿分		
	那由他亿分		
	百那由他亿分		
	千那由他亿分		
	百千那由他亿分		
	百万那由他亿分		
		俱胝分	俱胝分
		那庾多分	
百千俱祇那由他分			
迦罗分			
算分		数分	
数分		算分	
		计分	
喻分		喻分	
优波尼沙陀分		邬波尼杀昙分	邬波尼杀昙分

(二)大数记法

印度的大数记法和小数记法几乎同时传入中国。东汉时中天竺的迦叶摩腾和竺法兰共译的《四十二章经》中有百、千、万、百万、千万、亿、十亿、百亿和千亿等记载。月支的支娄迦忏在所译《佛说阿闵佛国经》卷上也记有“百倍、千倍、万倍、亿倍、巨亿万倍不等。”在他的《无量法静平等觉经》卷上则有“假令有百千、亿万那术佛，如是佛之数，使如恒河沙，计以沙等佛。”以及百亿、千亿万、百千亿万等，同书卷下还有十、百、千、万、亿、亿万、十亿万和千亿亿万。西晋时竺法护在所译《诸佛要集经》卷下有“九十六亿姟阿僧祇”和百倍、千倍、万倍和亿倍的记载。

鸠摩罗什于弘始七年(405 年)译《大智度论》100 卷，其中在卷四有较系统的记载：

“……问曰：何种三十二相叶因缘？答曰：过三阿僧祇劫，然后种三十二相叶因缘。问曰：几时名阿僧祇？答曰：天中人能知算数法，极数不能知，是名一阿僧祇。如一一名一，二二名四，三三名九，十十名百，十百名千，十千名万，十万名亿，千万亿名那由他，千万那由他名频婆，千万频婆名迦他，过迦他名阿僧祇，如是数三阿僧祇。”

这里不但有数名，而且有进位制。

《大智度论》卷五更有一批如下的大数名称：

百、千、万、十万、百万、亿、亿亿、阿由他亿、那由他亿、阿耶陀、频婆罗、歌歌罗、阿歌罗、箕婆罗、摩婆罗、婆陀、婆多、鞞[①] 婆呵、怖摩、念摩、阿婆迦、摩迦婆、毗罗迦、僧伽摩、……、阿僧祇、阿僧祇阿僧祇、无量、无量无量、……、一国土微尘等共 123 个。

在东晋译的《华严经》中也有 115 个大数名，但多与《大智

---

① “鞞”音 bǐng。

度论》不同。唐代于圣历二年(699 年)又重译完成，其中卷四十五和六十五都有大数名称，且多与《大智度论》的译音相近[1]。

《大智度论》卷二中还载有千进大数：

“以周利千世界为一，一数至千为二千中世界。以二千中世界为一，一数至千名三千大千世界。初千小，二千中，第三大千。千千重数，故名大千。二过复千，故言太千。”

在后秦时(384～417)沙门竺佛念译的《十住断结经》卷八中更有亿进大数：“……欲知数者，从一数至亿，以亿为一，复从一至亿，还数亿为一。……”

从上举的资料来看，印度佛经中的进位制相当混乱，在万以下基本上是十进制，万以上就复杂了。小数也是如此，不小于万分之一的小数，一般为十进，再小的小数就不一定了。这些大小数名称并不是数学计算实际采用的，而仅是象征性的“大”、“小”、“多”和“少”而已。但是做为一种历史资料是应当知道的文化现象。

(三)纪年法

在所译宗教经典中，关于纪年法的资料也值得一提。早在三国时吴黄龙二年(230 年)由竺律炎和支谦共译的《摩登伽经》中就有 1 年为 365 日，1 月为 30 日等记载。

记载纪年法资料最详细的要推前面提到的《大智度论》一书，该书卷 48 记有：

“日月岁节者，日名从旦至旦，初分、中分、后分；夜亦三分。一日一夜有三十时，春秋时分：十五时属昼，十五时属夜。余时增减：五月至，昼十八时，夜十二时；十一月至，夜十八时，昼十二时。一月或三十日，或三十日半，或二十九日，或二十七日半。有四种月：一者日月，二者世间月，三者月月，四者星宿月。

---

① 李俨. 中国古代数学史料. 北京：中国科学图书仪器公司，1954. 160～167

日月者三十日半，世间月者三十日，月月者二十九日加六十二分之三十，星月者二十七日加六十七分之二十一。闰月者，从日月[①]、世间月中出，是名十三月。或十二月，或十三月名一岁，是岁三百六十六日，周而复始。”

由上述资料可知，《大智度论》中所记之纪年法包括年、月、日、时四种单位。规定是①1 日为 30 时；②1 日是由旦(日出)到旦的时间长度；③1 日分为 6 分，昼、夜各 3 分。这都比较简单。可是对于月的日数规定就复杂多了，书中提出了 4 种。由于月的不同，也就形成了 4 种年。普通年为 12 个月，有的加闰月，则为 13 个月，日数有很大差别。

(a)日月，1 年$=12\times 30.5$ 日$=366$ 日。

(b)世间月，1 年$=12\times 30$ 日$=360$ 日。

(c)月月，1 年$=12\times 29\frac{30}{62}$日$=354.8066$ 日。

(d)星宿月，1 年$=12\times 27\frac{21}{67}$日$=327.7608$ 日。

从名称上看，(a)种应是“太阳月”[②]，(c)种应是朔望月，(b)种应为人们规定的年，月、年都是整日数，而(d)则为恒星月。这可能就是人们传统习惯上月的长度有 28 日、29 日、30 日和 31 日平太阳日的来历。很显然，日月的日数最接近一太阳的实际周期，世间月和月月比日月短，因此规定闰月，前者约 5 年加 1 闰月，后者约二三年加 1 闰月。

在昙无忏所译《金光明经》卷 1 中讲到一年分四季和六季的问题：“三月是夏，三月是秋，三月是冬，三月是春，是十二月，三三而说，从如是数，一岁四时。”接着又有“二二而说”，即每 2 个月为一时(季)，一年六时(六季)。

---

① “日月”应为“月月”。

② 实际上没有这种月，可能是宗教上规定的。

唐玄奘在《大唐西域记》卷二也记载了印度一年分六时或四时之说，都是从季首月 16 日开始到末月 15 日止。如分六季，第一季为正月 16 日到 3 月 15 日，2 个月，等等。

《大唐西域记》卷 2 还有如下有关时间单位的记载：

“时极短者，谓刹那也。百二十刹那为一呾刹那，六十呾刹那为一腊缚，三十腊缚为一牟呼栗多，五牟呼栗多为一时，六时合成一日一夜[昼三、夜三]。居俗日夜分为八时。[昼四、夜四，于一时各有四分]。月盈至满，谓之白分，月亏至晦谓之黑分，黑分或十四日、十五日，月有大小故也。黑前白后，合为一月。”

这段文字主要讲小于日的时间划分，又有僧俗的差别，在宗教方面则为

1 日＝6 时，昼夜各 3 时，
1 时＝5 牟呼利多，
1 牟呼利多＝30 腊缚，
1 腊缚＝60 呾刹那，
1 呾刹那＝120 刹那。

而居俗的一昼夜分为 8 时，昼夜各 4 时，再小的时间单位也不需要了。

在前引《大智度论》有 1 日为 30 时与 6 分之说，实为《大唐西域记》中的 30 牟呼利多与 6 时之说，因 1 日＝6×5 牟呼利多＝30 牟呼利多之故也。

值得注意的是，中国人自己撰写的佛经中也包括重要的印度数学史料，如僧一行就是其中之代表。他曾翻译和撰写了一大批佛教经典，如他撰写的《大毗卢遮那成佛疏》中即有笔算的记载，他写道：

“此中算数，喻者犹如世间下算之法，最初画置一字，以为其本[西方算皆于土中画之，未已，还画之耳。]乃至亿、载、阿僧祇等，皆生是生。然最初未下算时，本无是数。从此空地，本无

算术之中，而一下算，若二，若三，乃至无量。乃算毕已，除去众位，还空如本。”①

这段文字中的“最初画置一字，以为其本”，可能是指在计算一开始要写上一个字做为单位的记号或其本身即是单位，否则如不注意会弄错，直到计算完了去掉所有数字，而那个做为“本”的字还要保留。而“未已，还画之耳”是说数字符号只要没算完还是要接着往下写的，不过没有提到具体算法，也没有提用何数码。

根据这条资料来看，一行很了解印度笔算，很可能他也会这种算法。

① ［唐］一行《大毗卢遮那成佛疏》卷十九次百字成就持宋品第二十二。

第四章　与同时期东欧、西欧数学专著的比较

本卷跨越时期(3～10世纪)在欧洲约略相当于东欧拜占庭帝国、西欧法兰克王国时期。4世纪时罗马帝国分裂，后来欧洲这两东西封建王朝有各自宗教信仰，虽教会势力鼎盛，但世俗文化为宗教教育、宣传需要，还有相应发展。数学文献虽如凤毛麟角，但毕竟还是存在的。我们就原始材料与中算作一比较。

第一节　拜占庭帝国数学专著简介

米特洛道勒斯(Metrodorus，5，6世纪之交)为《希腊箴言》(Greek Anthology)写数学内容材料，阿奈尼(Anania，约620～685)《算术》是目前仅存拜占庭时代数学文献[①]。《希腊箴言》有很大篇幅，其第14章含箴言146则，其中大部分是故事、格言、谜语(如埃及人面狮身怪物有关人的谜语)，而数学题约占三分之一弱。如果按本书第二卷第四编方法分类，除盈亏、行程、几何计算三类外其余都有牵涉。

在余数问题中数学史上久负盛名的丢番都年龄题即出自《箴言》第126题。阿奈尼《算术》第11题也是这类问题。东罗马首都君士坦丁堡仿照罗马帝国制度，修建大规模输水道(aqueduct)和浴场、喷水泉，因此在数学题中也有反映，为数不多的合作问题即以喷水管满池选为材料，阿奈尼《算术》第24题也是同类问

① 见本《大系》副卷第一卷。

题。此外铸造金属碗的等差数列问题、三人纺羊毛线的分配比例问题，阿奈尼《算术》第22题集两种问题于一身，也同样反映了当时生活实际。

我们特别感到有兴趣的是其中三个不定方程问题。

第48题：我们如设欢乐三神每神篮中都有x个苹果，各给三个音乐神每神y个苹果，那么按照题意就要解不定方程$x-3y=y$，这就是$x-4y=0$，它的解是$y=k$，$x=4k(k=1,2,\cdots)$，可见后人为答案所作注释是正确的。

第50题：我们如设金属碗重x米奈，把另一金属块(我)重为y米奈，则据题意，应解

$$x+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{12}+y=1\ 。$$

这就是要解二元一次方程组

$$\begin{cases}20x+12y=12,\\5x+4y=4\ 。\end{cases}$$

可见原答只是特解：$y=0$ 。

第144题：我们如设甲像和它的基座分别重x，y，乙像和它的基座分别重z，u，则据题意，应解

$$\begin{cases}x+y=z+u,\\x=2u,\\z=3y\ 。\end{cases}$$

它的解应是$x=4k$，$y=k$，$z=3k$，$u=2k$ 。

第二节　法兰克王国数学专著简介

阿尔昆(Alcuin，约756～804)《益智题集》(Propositiones ad Acuendos Iuvenes)是法兰克王国时期数学专著仅存硕果，原作为

拉丁文，1993 年始有德文全译本[1] 全集收 53 题 。如果按照本书第二卷第四编方法分类，除盈亏、合作、余数问题外都有牵涉。

在**四则运算**中值得注意的是当时度量衡制度进制复杂，因此很简单的问题变得很繁琐。例如第 1 题蜗牛赴宴、第 46 题钱包被抢等题。

在**定和问题**中，已知某数的某一倍数加上 1，其和是 100，求此数，这一模式的题风行西方且达千年，这是从阿尔昆开始的。

互给问题　第 16 题两人运牛，显然是欧几里得驴骡问答题的翻板。

行程问题　第 26 题狗追一兔题已为数学史专著多次引述。

比例问题　第 7 题、合金分重，第 35 题、分给遗产，都是分配比例问题，其后者又是已涉讼千余年的名题。按原著解法 960 先令分为 24 份。儿子取 9 份，母亲取 3+5 份，女儿取 7 份，这样分配有违父亲临终遗嘱。因为如此分法，子：母＝$9:8\neq\frac{9}{12}:\frac{3}{12}$，母：女＝$9:7\neq\frac{5}{12}:\frac{7}{12}$。

数列问题　有等差数列(第 42 题)有等比数列(第 13 题，第 41 题)，后二题有夸大、浪漫色彩。哪来如此大庄园、大牲口房间能容纳成千上亿人和猪?

几何计算问题　在数量上成为压倒的多数，但质量不高，都是平面问题。三角形、四边形、圆面积，都是近似公式。三角形面积公式取二边平均与第三边折半的乘积(第 24 题，第 28 题)，四边形面积取对边平均的乘积(第 27 题)，圆周率取 4(第 25 题)，取 $\frac{25}{6}$(第 29 题) 。

不定方程　有 7 题，虽然是同一个模式，但在题材上、数据

---

① 本《大系》副卷第一卷米特洛道勒斯《希腊箴言》。

上还有一定变化。

数学游戏 这是本题集最大特色。渡河问题：狼、山羊、白菜是千古传诵、雅俗共赏的“难题”，人们说这是现代图论的起点，这题与兄妹父母二子渡河(第17至19题)同是首次出现在阿尔昆书中，此外分油问题(第12题、第51题)，虽然阿尔昆所拟题还极简陋，但不能不认为是后世组合数学构造课题中分油的雏形。另，第52题骆驼运粮，貌似简单：如分三批运完，老爸将一无所得，粮食将被骆驼沿途吃光，但正如原著所作解：不必三批运完，先各运20英里，仍各运30太仓，然后第四批运10英里还是运30太仓，到目的地还剩20太仓。在此启发下，该怎样策划运粮方案，不正是运筹学所应该研究的问题?

第三节 中国与欧洲数学专著的比较

我国数学发展到本时期适值两峰(秦汉、宋元)之谷。即使如此，还有不少代表性数学专著，其中有不少稀世之珍，传世篇章。例如《孙子》物不知数，《张邱建》百鸡问题，祖冲之父子球积公式推导，王孝通开河筑堤题等等。各专著能继承《九章》精神在数学严谨原则下各有创新处，我们已在本卷前面六编有关章节详论。有比较，才有鉴别。欧洲数学发展也正在双峰谷地，但彼邦正值宗教教廷统豁，学术气氛不高，从数学专著来看，较我远为逊色。

一 算题(应用题)

数学的源泉与应用都离不开生活和生产，以丰富现实需要拟题是提高学习兴趣最重要的手段。中国和欧洲睽隔且万里，古时交通条件极为艰难，但从现存文献看，数学家们还有相同见地，灵犀相通。我们选择5世纪时我国《张邱建算经》与同时期东欧米

特洛道勒斯、阿奈尼算书，和西欧阿尔昆算书在算题的类型上作出比较。当时东、西欧是在不同政治环境下，人们意识不一样：米特洛道勒斯、阿奈尼能以希腊诸神、喷泉入题，阿尔昆却以庄园征兵、巴西利加(会议厅)拟题，东、西欧两种专著如以本《大系》第二卷第四编方法分类各有不足、缺损，如融为一气，则可以与《张邱建算经》全书媲美，我们列表比较如下(表中数字为题号)。

表 8.4.1 几种算书中题型分类

问题	张邱建算经	米特洛道勒斯《希腊箴言》	阿奈尼《算术》	阿尔昆《益智题集》
四则运算	Ⅰ8，9；Ⅲ24			1，6，9，46，51～53
定和	Ⅰ29，30；Ⅱ18；Ⅲ12，22	6，11，13，49，128，129 139，141，142，		4，7，35～37，40，45
余数	Ⅲ17，34	1～4，116～118，121，124，126，138	11	
互给	Ⅲ13～15	51，145，146		16
合作	Ⅰ7，16，21 Ⅲ15，16，37	7，130～133，135，136	24	
行程	Ⅰ10，11，Ⅱ2，4～6，Ⅲ2			26

续表

问题	张邱建算经	米特洛道勒斯《希腊箴言》	阿奈尼《算术》	阿尔昆《益智题集》
比例	Ⅰ 24～28 Ⅱ 1，16～21，23，26～29，35	134		7，35
数列	Ⅰ 17，18，22，23，32 Ⅱ 1，3，13，36	12		8，13，4，42
几何计算	Ⅰ 12～15，19，20 Ⅱ 7～11，19～22 Ⅲ 3，4，5～9，25，30～33			9，10，22～25，27～31
不定方程	38	48，50，144		5，32～34，38，39
数学游戏				12，17～19，51

二 综 述

(一)计量制度

阿尔昆《算术》卷首详列计量制度换算表，这是全书总纲。这种做法与《孙子算经》相像，由于当时欧洲计量进位不是十进制，所以同种量的聚法和散法为算术计算带来出题目的好材料。阿尔

昆第1题蜗牛赴宴和第46题钱包被抢就是从进制换算引入的算题，特别是后者原来是单纯的除法问题，借助一番街景的渲染，问题就显得很生动，有戏剧性效果。造成见题后，人人跃跃欲试(解)的境界。

(二)数学学术水平

欧洲在本时期内恰值中世纪，即所谓黑暗时代。学术沉沦，所以算书水平低下，所有算题，题后所附解，实际只是答案。到底如何从题得答，无法理解。很可能是据答拟题，或是从埃及单假设法，或径自猜测，这与今存同时期中算专著相比，我们有其望尘莫及的长处。例如阿尔昆第26题犬追兔即为一例。《张邱建算经》卷中第5，6题为类似题，俱有算式，如果考虑3世纪时刘徽的工作，则中算有答，有解，且还说明所以然的道理。有些地方，出题目时，没有注意到题目条件不能多也不能少。

米特洛道勒斯第13题："哥哥重的$\frac{1}{3}$，弟弟重的$\frac{1}{4}$共重6米奈，两人共重20米奈。"已足够解出两人各自体重，而题中所说母重6米奈是多余的。有些地方，答与题脱节。例如米特洛道勒斯第50题："金属碗重的$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$以外，再加一金属块合重1米奈，求金属碗重。"原答$\frac{3}{5}$米奈，则"再加一金属块"重量应是零，否则原题为不定方程，原答为其特解(分数解)。又如阿尔昆第35题(双胞胎)我们上文已论其原答不符题设条件。此题如能按《张邱建算经》卷上第25题三丝连比例算法，答案应改为：子得$960\cdot\frac{7}{11}$，母得$960\cdot\frac{7}{33}$，女得$960\cdot\frac{5}{33}$先令。把子：母$=9:3$，母：女$=7:5$，通为连比，子：母：女$=(9\cdot7):(3\cdot7):(5\cdot3)$，然后按连比$63:21:15$分配比例那份960先令的遗产。在几何计算方面阿尔昆列举11题其数学水平很简陋，除长方形面积公式以外，都是近似的，误差太大。例如π取4，其相对误差远

较古埃及莱因得纸草为差。四不等田与我《五曹算经·田曹》相同，而且几何计算限于平面图形，在我国同一时期内如祖氏父子、王孝通能对球体、一般堤积提出正确公式且能作正确推导(指球积)，是当时欧洲数学所不能望其项背者。

分数计算是米特洛道勒斯的强项，散见各算题的计算中分数计算在数量及要求上可说明这一点，而《张邱建算经》卷上开宗明义地强调分数运算的重要和困难及其解决方案并在卷首列举分数运算例题。数列计算是阿尔昆的强项，其结果曾长时期领先，《张邱建算经》数列问题也不弱，而且不限于求末项，还有其他许多变化。阿尔昆第 6 题合款买猪题材有许多曲折，反映同类商品按质论价，这与《九章》其率术同义，如实地反映了买卖人的质朴生财之道。

(三)不定方程

米特洛道勒斯出现不定分析三则，阿尔昆六则。前者如用现代记号写出是

$$ax=by, \tag{i}$$

$$ax+by=c, \tag{ii}$$

$$\begin{cases} ax+by=cz+du, \\ ax=eu, \\ cz=fy, \end{cases} \tag{iii}$$

后者是

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ bx+cy+dz=a \end{cases} 。 \tag{iv}$$

我们知道方程(i)(iii)是齐次问题，如果把其中一个未知数视为常数，就可以按线性方程(组)解出。《九章算术·方程》五家出井就是这类题，解出后，答案是相对的，即刘徽注所说：举率以言之。方程(iv)非齐次不定方程也出现于《张邱建算经》卷下第 38 题百钱百鸡题，张邱建胜于阿尔昆的地方是指出三组(全部)特解，阿尔昆则仅给出一组特解。阿尔昆能作各种变化，显然难度不大，

但仍有不可泯灭的特色。方程(ii)是基本的二元一次不定方程，等价于同余式 $ax \equiv c \pmod{b}$，所以米特洛道勒斯所拟第 50 题是历史上较先进的数学现象。直到 13 世纪才由我国秦九韶立术解决(1247 年)。

(四)因袭关系

我们已在本《大系》第二卷第四编第五章之末评论中议论互给问题的因袭关系。除互给问题以外，余数问题、合作问题、百鸡问题东西方的源流来龙去脉，也是很吸引人的值得探讨的有趣问题。

第五章　7世纪后两道算题在国外的流传

我国南北朝时期首见的《孙子》物不知数、《张邱建》百钱百鸡题，在国外数学专著中也不断出现，中世纪时米特洛道勒斯《希腊箴言》含前者类型的算题，而阿尔昆《益智题集》含后者类型的算题六则，从时间上说，物不知数题在国外出现较晚。这两道题在国外数学文献出现频率很高，特别是《孙子算经》卷下第26题物不知数，在题后所附两种解法对一般同余式组的解法有很强烈的启发、提示作用，因此外国人把一次同余式组的解法称为中国剩余定理。①

第一节　物不知数

我们已在本《大系》第二卷第四编概说中提到德国人特洛夫凯(Tropfke J,1866～1939)《初等数学史》卷一第四章专章讨论自古以来世界著名算题。特氏在1939年逝世后三四十年间，特别是二战以后，东方材料西文版增多，他的同事和学生为他修订旧作，在柏林已出第四版②。新版中把算题分为两大类，各又给分类，每类又有子目。两大类是①日常生活算题。②益智算题。物不知数、百钱百鸡两题都在第二大类列有专类。国外有关算题都分别从孙子、张邱建起算。

在第二大类第五类余数问题之始特氏说：这类问题最早出现

① 数学百科辞典. 北京：科学出版社，1984，342：1343

② Tropfke J. Geschichte der Elementar mathematik. 4th ed. vol. 1. Berlin，1980

在中国《孙子算经》卷下第 26 题。其下全文译注物不知数题及其解法[①]。根据特氏书提供的线索我们仿照本《大系》第二卷第四编体例[②] 选列同类算题如下。

1. 自从六星会元以来，日、月、水、火、木、土六星回转整数次以外，又经过日数如表 8.5.1。

表 8.5.1　六星日数

星名	太阳	月	水	火	木	土
日数	1 000	41	1 000	315	1 000	1 000

已知太阳每 1 096 日回转 3 次，月 137 日转 5 次，水星 1 096 日转 13 次，火星 185 日转 1 次，木星 10 960 日转 3 次，土星10 960 日转 1 次。问：自从会元以来已经过了多次日？

2. 已给某数除以 6 余 5，除以 5 余 4，除以 4 余 3，除以 3 余 2。求此数。

答：59（上两题均出自婆罗摩笈多《婆多摩修正历数书》[③]628）。

3. 有 63 堆数目相同的香蕉，添进 7 只后，混在一起平均分给 23 个旅游者，没有剩余的。问：每堆有几个香蕉？

答：5。

4. 有 31 堆数目相同的檬果，除去 8 只后，刚好平均分给 73 个人。问：每堆檬果有多少？

答：11。

5. 一群旅游者看到森林里有一堆檬果。除去 7 个，可以平均分成 8 堆；除去 3 个，可以平均分成 13 堆。数学家，请告诉我，

---

① 该书 P636。

② 本节 1～15 题可作为第二卷第四编第三章余数问题的第五节。

③ 该书 P326～328. 据 Colebrooke H T 英译本，London，1817

这堆檬果有多少个？

答：55。

6. 一堆苹果分别平均分成2堆，3堆，4堆，5堆，每次都剩下1个。数学家，请告诉我，这堆苹果有多少个？

答：61。

7. 一数除以2，余1，除以4，余3；除以3，除以5，分别都除尽。问：此数是多少？

答：75。

8. 一群旅游者在路边看见一些含果子数目相同的果子堆。取2堆平均分给9人，多3个；3堆平均分给11人，多5个；5堆平均分给7人，多4个。问：每堆水果有多少个？

答：537。

9. 有好几堆个数相同的水果在这里。5堆添2个，平均分给9人，没有剩余。取6堆添4个平均分给8人，没有剩余；4堆添1个平均分给7人也无剩余。问：每堆果子有多少？

答：194。

(3～9题采自摩诃维罗《数书九章》[①])

10. 设计一个数，除以3，除以5，除以7，并问每除之后，各余多少，对于除以3所剩的每个单位1，要记住70，对于除以5的余数每个单位1，要记住21，对于除以7的余数每个单位1，要记住15。这样的数如大于105，则减去105，其剩余就是所设计的数。例如：一数除以3余2，记住70的2倍或140，其中减去105，则余35。如除以5余3，记住21的3倍或63，与上述35相加，得98。若除以7余4，记住15的4倍或60。与上述98相加，得158，减去105，其剩余53，就是所设计的数。

11. 某数除以2，3，4，5，6，余数依次为1，2，3，4，5；

① Mahavira. Ganita-Sara-Sangraha. Madras, 1919. 121～125

除以 7 适除尽。问：此数是多少？

12. 某数除以 2，3，4，5，6，7，8，9，10，余数依次为 1，2，3，4，5，6，7，8，9；除以 11，适除尽。问：此数是多少？

(10～12 题采自斐波那契《算经》,1202)

13. 某数除以 23，17，10，其余数分别是 12，7，3。问：此数是多少？

14. 某数除以 17，13，10，其余数分别是 15，11，3。问：此数是多少？

(13～14，玉山若干，Regimontanus，1436～1476。在 1473 年致信边契尼(Bianchini)。次年边契尼回信：对第 14 题，1 103，3 313，…都是答案。玉山若干又给信：只需说答案是 $1\,103+17\times13\times10n$。)

15. 一农村妇女卖蛋。顾客问她，你有多少蛋出售，妇女答：我不知道，我只知道两个两个数，多 1 个，3 个 3 个数，多 1 个，4 个 4 个数，5 个 5 个数，6 个 6 个数都多 1 个，7 个 7 个数没有剩余。你说有多少蛋？

答：$N=420n-119$，也就是说 301，721，1 141，…

(拜占庭民间流传题，15 世纪)

评论　从上引 15 题可见《孙子》物不知数题流传之广。7～9 世纪印度人这方面算题形式多样，应该说可与 13 世纪时我国秦九韶《数书九章》匹敌，甚或过之。例如秦氏的同余组题都是 $x\equiv r_i \pmod{m_i}$ 类型，而摩诃维罗有 $a_ix\equiv r_i \pmod{m_i}$ 类型，$i=1, 2, \cdots, n$。显然在解法方面则远不如。摩诃维罗在出题目时是那么小心翼翼，一般说在同余组问题中模数都两两互素；也有不两两互素例如第 7 题，但他又限制余数，不自觉地在遵循同余式组有解的充分必要条件。12，13 世纪之交比萨斐波那契的同余题及其对解法的说明与孙子原术非常相像，可惜没有进一步论述，怎样解模数

是3，5，7以外的同余式组题，所以他的解题水平没有超过孙子。

欧洲进入16世纪后，印刷术发达，算术教科书如雨后春笋，一般都把孙子物不知数题列为常见题。特洛夫凯书P. 640～642罗列当时许多算术教科书，作者如Tartaglia，Köbel，Rudolff，Chuquet，Calandri，Ghaligal，Trenchant，Buteo，Bachet都有这类题。

即使到本世纪这类算题还作为酒后茶余的娱乐材料，常有传闻。Whitehead A N(1861～1947)，数理逻辑专家，在业余曾提出一题：五个水手带了一只猴子，来到太平洋一个荒岛上，发现那里有一大堆椰子，他们旅途劳顿，就躺下休息了。不久，第一名水手醒了，把椰子平均分成五堆，还剩下一只椰子，他把它丢给猴子吃了，自己藏起一堆，就翻身睡了。隔了一会，第二个手水醒了，他把剩下的椰子重新分成五堆，正好多出一只，他又把它赏给了猴子，自己藏起一堆以后，又去睡了。……接着，第三、第四和第五个水手也都如此做。不久，天亮了，大家都醒了，发现剩下的椰子已经不多，水手们大家心照不宣。为了表示公平，又重新把剩下不多的椰子又重新等分成五堆，五名水手各拿一堆。这时说也奇怪，正好又多出一只椰子，再把它丢给已饱尝甜头的猴子。你能算出原先一共有多少只椰子吗？[①]

第二节　百钱百鸡

在第二大类第二类百鸟问题之始特氏说：这类问题最早出现在中国《张邱建算经》(485年)卷下第38题。其下全文德译百钱

---

① 怀德海．过人才智．科学画报，1979，(6)～(7)．此题原载美国《星期六邮报晚刊》．本题为不定方程，最后化为同余式：$1\,024x \equiv 11\,529 \pmod{15625}$，$x \equiv 15\,621 \pmod{15625}$

百鸡题及其三组特解。上文我们已论述7世纪时阿尔昆《益智题集》引入此类题的变体达六种之多。其后西方和东方数学教科书频频出现，成为热门名题，我按时间先后选录如下[1]：

1. 3只孔雀值2钱币，4只鸽子，5只鹅，6只塞拉鸟依次值3，4，5钱币。现有56个钱币，要买72只鸟。问：可各买几只鸟，各值多少钱币？

答数：孔雀7只，值$\frac{14}{3}$钱币，鸽子16只，值12钱币。45只鹅，值36钱币；4只塞拉鸟，值$\frac{10}{3}$钱币。

2. 5拍拉重生姜值3钱币，11拍拉重胡椒值4钱币，1拍拉重波斯葱值8钱币。现有60个钱币，要买68拍拉调味品。问各可买多少拍拉，各值多少钱币？

答数：生姜20拍拉值12钱币，胡椒44拍拉值16钱币，波斯葱4拍拉值32钱币。

3. 5只鸽子值3钱币，7只鹤值5钱币，9只鹅值7钱币，3只孔雀值9钱币。某人为取悦王子，以100钱币买100只鸟为礼。问：能买鸟各几只？

答数：买鸽子、鹤、鹅、孔雀依次化钱9，20，35，36钱币。

(1～3题采自摩诃维罗《数书九章》pp. 132～134)

4. 阿拉伯世界在阿部·喀弥儿(A bu Kâmil，850～930)著作中也出现过百鸟算题，[2]其中有相当于解不定方程组：

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+\frac{1}{20}y+z=100。\end{cases}$$

他的解法与印度库塔卡有别：在消去z之后，得$y=4x+\frac{4}{19}x$，然

① 本节1～10题可作为本《大系》第二第四编第二章定和问题的第五节.

② юшкевич А. П. История Математики в Средние Века. Москва，1961. 222

后假设 $x=19$，得 $y=80$，$z=1$(唯一正整数解)，然后又设题相当于解

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+2z=100,\end{cases}$$

有 6 组正整数解，他还有 98 以及 304 组解的四元方程组(含两个方程)算题。书中还有

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\ 3x+\frac{y}{20}+\frac{z}{3}=100。\end{cases}$$

当化到 $x=25+\frac{17}{160}y$ 后阿部·喀弥儿断言此题无正整数解。

5. 巴克赫莱桦树皮手稿有题[①]，相当于解方程

$$\begin{cases}x+y+z=20,\\ 3x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=20。\end{cases}$$

原题只给一组答案 $x=2$，$y=55$，$z=13$。

6. 有人买鸟：麻雀 1 钱币 3 只，斑鸠 1 钱币 2 只，鸽子 2 钱币 1 只。30 个钱币买 30 只鸟。我们需要知道各种鸟他买了多少?

解法：我先假设买 30 只麻雀需要 10 个钱币，余下 20 个钱币，这是 30 与 10 之差。然后我以 1 只麻雀交换 1 只斑鸠，这样就增加 [付款] $\frac{1}{6}$钱币。这是因为麻雀每只值$\frac{1}{3}$钱币，而斑鸠值$\frac{1}{2}$钱币，贵麻雀$\frac{1}{6}$钱币。然后，我以 1 只麻雀交换 1 只鸽子，使变动了 $1\frac{2}{3}$，就是$\frac{1}{3}$与 2 之差。我取 6 个 $1\frac{2}{3}$，变换 6 个，得到 10。据此我应该调出麻雀改为斑鸠和鸽子，直到把余下的 20 个钱币用

---

① 本《大系》副卷第一卷巴克赫里手稿。

完。所以我取他们的 6 倍，我得到 120。把它分成两部分，其中一部分刚好使被 10 整除，其余部分为 1 整除。其两次分的 [结果的] 总和不能超过 30。其第一部分是 110，其余是 10。我分第一部分 110 为 10 份，第二部分为 1 份，我就得到 11 只鸽子和 10 只斑鸠。30 只鸟数之中，余下 9 只作为麻雀，麻雀共值 3 个钱币，而 10 只斑鸠值 5 个钱币，11 只鸽子值 22 个钱币，这样 30 个钱币就买 30 只鸟(斐波那契《计算之书》,1202)。

7. 今有 1 只鸭值 4 钱，5 只雀值 1 钱，1 只鸡值 1 钱。百钱买百鸟。问：鸭、雀、鸭各买多少?

解法：取 1 只鸭与所值钱数差乘以 5 只得 15，是雀数。取 5 只雀与所值钱数之差乘以鸭 1 只得 4，是鸭数。100 鸟数减去鸭雀数的总和，是鸡数。鸭、雀加倍，又 3，4，5 倍，依次得到其他四个答案。题后附这五个答案：鸭、雀、鸡只数是 4，15，81；8，30，62；12，45，43；16，60，24；20，75，5。他们所值依次是 16，3，81；32，6，62；48，9，43；64，12，24；80，15，5(阿尔·喀西,《算术钥》卷五第四章,1427)。

欧洲进入 16 世纪后，算术教科书也把百鸡百钱题列为常见题。特洛夫凯书 615～616 页，列举当时许多算术教科书如作者：Thierfedern，Calandri，Pacioli，Widman，Rudolff，Apian，Ries，Buteo，Tartaglia Gehrl，等都有类似题，例如 Thierfedern 设题：

8. 男人、妇女、小姐共有 47 个钱币，他们每人依次付出 5，3，$\frac{1}{2}$钱币。问：男人、妇女、小姐各几人?

答数：3，4，40(Thierfeldern《算术》,1587)。

评论　从上引八题可以窥测，张氏百钱百鸡题发表后一千多年，世界各地区对此题研究情况之大略。

印度 9 世纪时摩诃维罗已知数据中用分数较多，未知数增多

到四个，是进步的地方，但题文与答案间有矛盾，例如第3题买四种鸟题鹤数应被7整除，鹅数应被9整除，与答案条件不符。阿拉伯世界阿部·喀弥儿对此有重要进展：能断言问题解是否存在，如存在能尽言所有正整数解。比萨的斐波那契用推理法解题，思路清晰。如果此题下放到小学高年级，借助这种方法可以解同类问题。阿拉伯世界另一知名数学家阿尔·喀西三鸟题（第7题），其解法很别致，但令人费解：我们如设鸭、雀、鸡分别有x，y，z只，原题相当于要解不定方程组

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\4x+\dfrac{y}{5}+z=100,\end{cases}$$

变换为

$$\begin{cases}4x+\dfrac{1}{5}y=x+y,\\5(4-1)x=(5-1)y。\end{cases}$$

其中左边$5(4-1)x$就是："取1只鸭与所值钱数(4)差，乘以5"，而$5-1$就是"取5只雀与所值钱数(1)之差"，所以喀西解法有一般意义。杨辉所著书于明代东传日本，在各个领域影响日本数学。杨辉受张邱建百钱百鸡题启迪，在其《续古摘奇算法》设百钱百果题，而且有详解①、日本江户时代（相当我国明代）和算发达，其中松永良弼、会田安明都有不定方程专著，都是通过杨辉题使百钱百鸡题在东瀛余绪不断，参见本编第二章第八节。

---

① 我们将在本《大系》第五卷第七编介绍。

第六章　阿基米德《方法》与牟合方盖体积和球体积公式

祖暅借助于刘徽提供的几何模型——牟合方盖，计算球体积 $=\frac{\pi}{4}$牟合方盖。关键是要计算牟合方盖体积，祖暅的功勋是找到了求牟合方盖体积的方法。牟合方盖，牟：义，相等，盖：义，伞。两直交等半径圆柱的公共部分(图 8.6.1)。刘徽恰当地给予命名——牟合方盖，上下相合的两顶方形伞所含空间。我们把外切于方盖的立方体、圆柱以及内切于方盖的球的体积依大小分别记为 $V_1 \sim V_4$，则四者体积关系，应为

$$V_1 : V_2 : V_3 : V_4 = 1 : \frac{\pi}{4} : \frac{2}{3} : \frac{\pi}{6}。$$

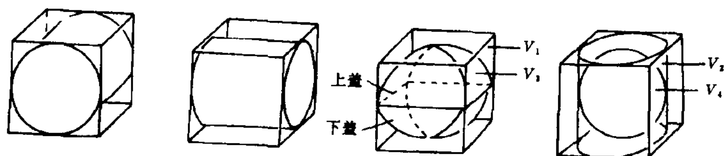


图 8.6.1

在古希腊也曾研究过这一立体。把立体考虑为无厚微分元素的积累。阿基米德(公元前 287～前 212)在《方法》一书中系统介绍了他研究的成果，此书久佚，直至本世纪初，1906 年德人哈贝(Heiberg J C)在君士坦丁堡修道院发现这一论著的 10 世纪羊皮纸抄件(残)本，次年在莱比锡《数学历史杂志》与佐胜(Zeuthen H G)联名译释(德文)发表。阿氏这一工作又重见天日。全书共 16 个

命题。序言说此书是阿氏呈献给亚历山大城学者埃拉托斯芬(Eratosthenes，约公元前276～前195)之作，以介绍他新发现的两个立体的体积公式。并且已知道推导公式的方法。其一是马蹄形(略)，其一是："一圆柱内切于立方体，其上下底在立方体两相对面内，侧面则切于另外四面。在同一立方体内又有一内切圆柱体：以另外两相对面为上下底，圆柱侧面则切于其余四面。这两个圆柱体的公共部分是立方体积的三分之二。"显然阿基米德所说而不及命名的立体就是刘徽命名的牟合方盖。

第一节　牟合方盖

《方法》命题15有牟合方盖体积公式的推导。我们加绘直观图(图8.6.2)。

图中立方体$XYWV$内作正交两圆柱，分别以BOD以及过O而垂直于BD，AC的直线TU为轴。在立方体之外又以两倍于立方体边长，如LG为底边长、以立方体边长为高作方柱体[①]。又以方柱体底为底、A为顶点作方锥体，任一水平截面如MN截方锥体、两正交圆柱公共部分、方柱体都有正方形截面，面积分别是QR^2，KP^2，MN^2。延长CA至H，使$CA=AH$。以CH为杠杆，A为支点，阿基米德推导出[②]

$$QR^2 \cdot AH + KP^2 \cdot AH = MN^2 \cdot AS$$

他又把所有水平截面关于支点A的矩求和，得

$$(\text{方锥体}+\text{两圆柱公共部分})AH=\text{方柱体}\cdot\frac{1}{2}AC.$$

于是得到，先于祖暅，两圆柱公共部分$=\dfrac{2}{3}$立方体。

---

① 方柱体体积=4立方体体积。

② 见后文球体积公式的推导。

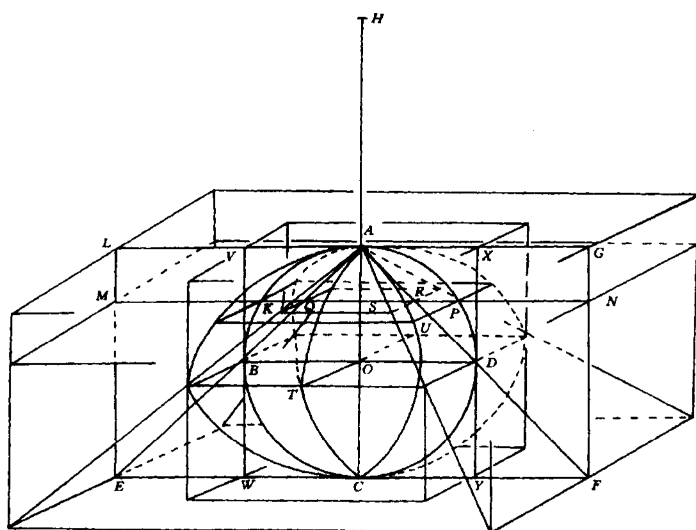


图 8.6.2

第二节　球　体　积

在《论球与圆柱》卷 1 阿基米德曾以大量篇幅：以 33 个命题为准备，用穷举证法在命题 34 得出结论

$$V_{球}=4V_{圆锥},$$

其中圆锥以球半径为高、球大圆为底。他又在《方法》命题 2 再一次讨论球的体积公式。他认为立体是由面积元素构成的。然后又与推导牟合方盖体积公式相仿方法运用杠杆平衡。

在图 8.6.3 中，BD，AC 是互相垂直的球大圆直径。作正方形 $VXYW$，外切于大圆。O 为球心，过 BD 作平面垂直 AC，在此平面内作以 BD 为直径的圆。以此圆为底、以 A 为顶点作圆锥面。延长圆锥面直到过 WY 且与 AC 垂直的平面相交，形成一圆，EF



图 8.6.3

为其直径，以此圆为底再作圆柱面 $LGFE$。延长 $AH=AC$，把 CH 作为杠杆，中点 A 作为支点。任取一直线 $MN /\!/ BD$，交大圆于 K，P；交直径 AC 于 S，交 AE，AF 于 Q，R。连结 AK，AP，过 MN 引平面垂直 AC，截圆柱得直径为 MN 为圆，截球得直径为 KP 的圆，截圆锥得直径为 QR 的圆。而 $MS=AC$，$RS=AS=QS$，于是

$$MS \cdot QS = AC \cdot AS = AK^2 = KS^2 + QS^2。$$

由于 $AH=AC$，

$$AH : AS = AC : AS = MS : QS = MS^2 : (MS \cdot QS)。$$

这就是说：

$$AH : AS = 圆柱截面 : (球截面 + 圆锥截面)。$$

这说明在 S 处圆柱截面关于支点 A 与放在 H 处的球截面和圆锥

截面平衡。这一事实对于任意平行于 EF，垂直于 AC 的截面都成立，于是把所有有关面积与力臂乘积，有关面积与重臂乘积分别求总和，由于 O 是圆柱的重心，得

$$AH : AO = \text{圆柱} : (\text{球} + \text{圆锥 } AEF),$$

因此圆柱≐2(球+圆锥 AEF)，再从欧几里得《原本》卷 12 命题 10 知

$$\text{圆柱} = 3\ \text{圆锥 } AEF。$$

而 $EF = 2BD$，圆锥 $AEF = 8$ 圆锥 ABD，于是

$$\text{球} = 4\ \text{圆锥 } ABD。$$

中国《九章算术·少广》开立圆术说

$$V_{\text{球}} : V_{\text{外切立方体}} = 9 : 16。$$

刘徽注指出此式不确，他指出

$$V_{\text{球}} : V_{\text{牟方方盖}} = \pi : 4。$$

对照我国刘徽至祖暅几代人的同一工作，在时间上阿基米得领先，但是在工作质量上他有不足之处。其一，不说在《论球与圆柱》一书中动用篇幅过多，即以《方法》命题 2 所证，引线，设体，立杆，取点，也很繁复不如祖法单纯；其二，刘徽能言球与方盖体积关系，因此可以相互推导。而阿基米得对此没有考虑过，因此命题 2 虽已有正确结果，他还是重起炉灶，另设命题 15 对牟合方盖体积公式，又重新独立推导。于此进一步说明刘祖公式的重要历史和世界意义。

第七章 近现代外国学者对本时期数学专著的评介与研究

本时期数学虽值中算数学发展两峰之谷，正如上文已指出那样，某些成果还是出类拔萃的，是世界数学文化的珍珠和钻石。一旦被有心人发现，就奔走相告，受人赞美。其中不定分析被外国人发现较早，其他如祖暅求积术、王孝通堤积术则被发现较迟，直至 70 年代末才渐为人注意。

第一节 一般评介

最早把本时期数学著作介绍到西方的是英国人伟烈亚力（Wylie A，1815～1887），字卫礼，他在鸦片战争结束，《南京条约》签订(1842 年)后五年，即来华宣教，并认真学习汉语。郁松年宜稼堂丛书本《数书九章》刚于 1842 年出版，伟烈在习读汉语的同时，竟然勇于攻坚，读通秦氏大衍总数术、大衍求一术，在来华短短五年后(1852 年)就在《字林西报》(North China Herald，8 月～11 月)连续发表(第 108，111～113，116，117，119～121 共九期）“中国科学记事”(Jottings on the Science of the Chinese)这一长篇论文(下简称“记事”)。伟烈是李善兰(1811～1882)译著的伙伴。在这篇论文发表的当年，李氏才自荐到上海墨海书馆工作，不久他俩就先后共译西方天算名著多种：欧几里得《原本》后九卷，棣么甘《代数学》，罗密斯《代微积拾级》等，可见伟烈作为汉、英文化交流知名人士，他的西算译汉乃是中算译英之后的工作。

我们从“记事”一文原件可见伟烈曾读过阮元《畴人传》，文中以较多篇幅系统介绍自先秦至清中算脉络，一般说大事不漏，细节也大致正确。全文重点是介绍秦九韶《数书九章》。他从佶屈聱牙、难懂的大衍总数术术语中疏通第一章九题，且以第1题为重点介绍秦氏术文的全过程。我们将在本《大系》第五卷有关章节详细报导。秦氏术是《孙子算经》物不知数题的深入和发展，所以伟烈在介绍秦氏术之前又渲染了孙子的这一名题，伟烈向西方人宣扬和赞赏，他在“记事”中说：“最值得引人注意的中算概念是大衍术——不定问题的解法。这一法则最先在《孙子算经》物不知数题出现。……原作用四句押韵的诗句表达全题(下全译原题)之后，是解此题的特殊法则，行文简单明了，是为初学者所作解法提示(下全译术文第一部分)，之后是解同类题的一般法则(下全译术文第二部分)。”接着就是对秦九韶为解此题创立的大衍总数术详介。

“记事”发表后通过各种传媒在欧陆广泛传播。毕奈兹基(Biernatzki K L)把此文译成德文①(1856年，含译文疏忽和错误，甚至把“不定问题的解法”译成“求未知数的方法”。丢尔凯(Terquem O)从德文本译成法文(有以讹传讹不实之词)。近代数学史学科的奠基人德国学者康托尔(Cantor M B，1829～1920)所写《关于数学的历史》中曾说：“看来中国人特别在不定分析研究方面比同时期有文化的民族较为逊色。”这是受毕奈兹基德文译本误导的影响。不久另一德国学者马蒂生(Mattiessen L)著作系列论文论述中国和印度的不定分析，在1875年致书康托尔订正毕奈兹基的错误，使后来康托尔名著四卷本《数学史讲义》(1880～1908)对孙子物不知数、张邱建百钱百鸡题有中肯的评说。

在本时期数学专著原作中，介绍不定问题问题有功绩的第二

① Biernatzki K L. Die Arithmetik d. Chinisen. JRAM, 1856

个外国人是日本人三上义夫(1875～1950)，他写出《中国与日本数学发展史》[1]全书分上、下两编，上编论中国，计27章，其中第4，6，7，8章分别论《孙子算经》、《张邱建》、圆周率、王孝通的三次方程，由于作者精通汉语又熟谙英语，因此本书在西方对中算认识的影响，显然大大优于伟烈的“记事”，是后来美国卡约黎(Cajori F，1859～1930)、史密斯(Smith D E，1860～1944)的本世纪二三十年代标准的数学通史言中国隋唐数学史事的最重要文献来源。令我们费解的是，在三上的著作中略去祖暅的重要业绩，致使祖的光辉成果直到70年代末期才大白于西方。

李约瑟在其巨著《中国科学技术史》第三卷中对本时期数学专著，作出中肯的评论说：不定分析首先是《孙子算经》开始的，然后才出现在阿耶波多(5世纪)的著作，尤其是婆罗摩笈多(7世纪)的著作中。代数学这个分支的知识可能是通过阿拉伯人和印度人的介绍在14世纪传给拜占庭僧人阿吉罗斯的。一个涉及不定方程的问题，百鸡问题，首先出现在公元500年前后的《张邱建算经》中，随后以几乎完全相同的形式在摩诃维罗(9世纪)和婆什迦罗(12世纪)的著作中。在唐代，王孝通成功地解决了三次方程数学系数方程……在欧洲，斐波那契(13世纪)是第一个提出王孝通那类问题的解法的人。有理由认为，他可能受到东亚来源的影响。

比利时学者李倍始(Libbrecht U)在《中国科学技术史探索》撰写的论文“敦煌千佛洞算书手抄本”，是在学习李俨有关论著，以英国所藏经卷缩微胶卷进行核对，并且到巴黎查读原件的基础上完成的。论文是对西方人学习敦煌数学很好的启蒙教材。在论文结论中，他认为有关经卷第一次清晰地阐明了筹算记数法。他又说：只有与同时代的欧洲及世界其他地方的同类著作相比才能作出对它的正确评价，但在文末李氏把敦煌数学不公平地断为

---

① Mikami Y. The Development of Mathmatics in China and Japan, Dresden, 1910

"面包屑也是面包"。本卷第七编敦煌数学正为纠正此说作出初评。

第二节　论文和专书

本时期数学专著被外国人选为研究课题，习作论文，出版专著有好多起，我们选述如下。

一　《孙子算经》

(一)俄文译本

苏联学者 Э·И·别列兹金娜(березкина)从事中国数学史研究已 40 多年。本《大系》第二卷已报导她在 1957 年发表全文俄译《九章算术》并作注释。接着她就全力研究本卷所覆盖范围内的中国数学专著，全文译《孙子算经》(1963 年)。"论《孙子算经》"[①]对当时苏联人学习中国科学技术史起到很好积极作用，上述数学专著在俄文文化领域内开花结果，这是很了不起的工作。

(二)英文译本

新加坡学者国立新加坡大学数学系蓝丽蓉与马来西亚吉隆坡大学中文系洪天赐在 1992 年发表《追迹》一书，英文名为 Feeting Footsteps。副标题是描述中国古代算术和代数概念。本书由新加坡世界科学出版社出版。[②] 全书分上下两编。下编对《孙子算经》三卷(含序)全文英译。上编分九章：对《孙子算经》简介，介绍了孙子其人和版本情况，筹算、记数及命数法，四则运筹，普通分数，开方，计量，各种算题，以及《孙子算经》与当时中国社会

① Берёзкина Э И. О математическом труде Сунb-цзы，Из истории науки итехники в странах Востока，1960，вып. I

② Lam Lay Yong，Ang Tianse. Fleeting Footsteps. London：World Scientific，1992

经济。最后一章是论述印度—阿拉伯数字及其记数法是否是起源于筹算?

《追迹》下编译本为英语世界提供完整、准确可靠的《孙子算经》英文译本。蓝丽蓉又在上编详尽地介绍《孙子算经》的细节和特色,《孙子算经》作为算经十书的第四部,蓝氏这一工作无疑是数学史界的一大盛事。另,《孙子算经》首次提出中算最根本的计量制度与筹算制度。蓝氏在1988年已在SCI级杂志《纯科学史纪录》第38卷发表题为:“起源在中国——我们的记数制度历史应该重写”的论文①,因此借助《追迹》的出版,她有意识地、有重点地从以筹算为唯一工具的各种算法(四则运算、开平方、开立方、分数、最大公约数、小数表示法、三率法、衰分法、盈不足术、方程术、正负术、增乘方法、贾宪三角形、垛积术、内插法、物不知数题、大衍术等)试图雄辩地说明印度—阿拉伯数字及其记数法只可能起源于中国筹算法。后者比前者要早出许多世纪,通过当年丝绸之路频繁的宗教、商务等接触,在中国广泛使用的等算法传布到印度并不困难,于此蓝氏提出一个很新款而耸人听闻的结论(上编第9章):正如F·培根(Bacon F,1461~1526,英国)说过那样:印刷术、火药和磁针三大发明使世界一切事物变了样,中国筹算及其记数法可以提高到是中国对人类科学文明最重要贡献之一。

二 《张邱建算经》

(一)俄文译本

苏联别列兹金娜 1969年用俄文全文翻译。文后有论文“论

① Lam Lay Yong. A Chinese genesis: Revoriding the history of our numeral system. In: Archive for History of Exact Sciences. London: Springer-Verlag, 1988

《张邱建算经》”。[①]

張邱建算經卷下

漢中郡守前司隸臣甄鸞注經

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等　奉敕注釋

唐算學博士臣劉孝孫細草

醇酒每㪷七貫行酒每㪷三貫醨酒三㪷直一貫今支一十貫買酒十㪷

問各行幾何

答曰醇酒六升價四貫二百文

行酒一㪷價三貫文

醨酒八㪷四升價二貫八百文

術曰三價中以一價除出一位所得之數其余二物共價如雙分身

法求之題有分子者通之

草曰置十貫酒十㪷先以行酒一㪷三貫除出一㪷余錢七貫鄧醇

酒九㪷共價也如雙分身術求之內醨酒三㪷直一貫合通分以共價七

貫作三二因一十醇酒一㪷直七貫三亦因用醨酒三㪷直一貫以醨二

價相減余二十貫爲法除實行醇酒六升反減九豆共數得醨酒八㪷四

升以各價乘之合問

今有甲乙丙了戊五人共分五鹿欲以六五四三二一差之間各得幾何

图 8.7.1

① Берёзкина Э И. О Матеме. Чжан Цюцзяня по математике Физ-Мат，Науки в странах Востока，1969，вып. I

今有弧田弦六十八步五分步之三爲田二畝三十四步四十五分步之三十二
問矢幾何
荅曰矢一十二步三分步之二
術曰置田積步倍之爲實以弦步數爲從而開方除之即得矢
草曰置二畝以步法二百四十乘之内子三十四得五百一十四步以分母
四十五乘之内子三十二得二萬三千一百六十二倍之得四萬六千三百二十
四又置弦步數六十八步以分母五乘之内子三得三百四十三以弦步數分母
五除田積步分母四十五得九以九乘三百四十三得三千八十七爲從以從法
開方除置前積四萬六千三百二十四于上別置分母四十五于下常超一位步
至百止又置從法三千八十七于下法之上以上商置一十于積步之上又置四
百五十于積步之下從法之上名曰方法并方從法以命上商得三萬五千三百
七十除四萬六千三百二十四余一萬九百五十四又倍方法而并從方得三萬
九千八百七十退一位下法再退又置二于上商之下又置九十于下法之上名
曰隅法并三千九百八十七得四千七十七以命上商得八千一百五十四除一
萬九百五十四余二千八百又倍隅法而并從方得四千一百六十七以下法四
十五爲母乘余實二千四百得十二萬六千爲實從方不動下法定爲一而開方
除之得三十爲子十不存盡之九子母各以十五約之爲三分步之二合問
張邱建算經卷中

图 8.7.2

(二)何丙郁论文

1965 年何丙郁[①] 在《远东》杂志第 12 卷发表英文论文[②]："《张邱建算经》佚题。"论文作者称，因明代常熟汲古阁影宋刊

---

① 何丙郁现任英国剑桥李约瑟研究所所长。

② Ho peng Yoke. The lost problems on the Chang Chiu. Chien Suan ching, Oriens Extremus. Hamburg, 1965, Heft1.

本(入清后收入内廷,称"天禄琳琅阁"本)《张邱建算经》卷中缺少最后一页，第 22 题(弧田反算矢高)术文缺损；而卷下则缺少第 1 页正反两面，致使第 2 题缺少题文。第 1 题更无踪影。

关于卷中末页佚文、论文作者同意李俨的主张对清代顾观光所著《九数存古》补作不满意，另拟补文如图 8.7.1。

关于卷下所缺第 1 页，从南宋杨辉在《续古摘奇算法》卷下所提供信息："辉偶见写本，有此题问。"以此题问，即醇酒、行酒、醨酒十贯十斗题补足第 1 页正反两面，并补作第 2 题题文如图 8.7.2。论文作者据意或据有关典籍补出佚文，无疑在中算研究上是很有意义的工作。

(三)洪天赐论文

马来西亚学者马来亚大学中文系洪天赐在 1969 年以 275 页篇幅写成论文"《张邱建算经》研究"[①] 获硕士学位，此论文当时没有出版。1978 年他在《国际数学杂志》发表"中国对直角三角形的工作"一文，全面论述自《周髀算经》以后有关成果，并与同期西方相比较，对于《张邱建算经》他有选择地向西方论述两题：卷上第 12 题和第 15 题，对于后者在全译题文及术文后，他补图如图 2. 2. 5，他评价张邱建善于开拓前人工作，具有结合测量实际，掺入代数的几何创见。

三　祖暅的《九章算术·少广》立圆术注

(一)三上义夫论文

1910 年发表《中国与日本数学发展史》后 20 多年，三上义夫在 30 年代之初获得博士学位，其博士论文进一步深入探讨中算与

---

① Ang Tianse. A Study of the Mathematical Manual of Chang Ch'iu-chien. M. A. dissertation. unpubshed, 1969

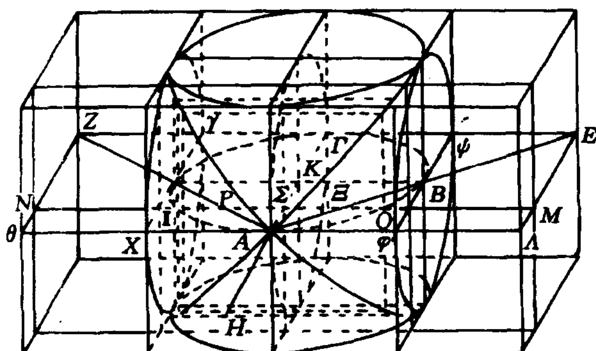


图 8.7.3

和算的关系①，共 32 节，洋洋 20 万言。我们知道祖暅(6 世纪)立圆术注端赖《九章算术》李淳风注得于保存。此注主要推导牟合方盖体积，久无疏文，学者为难。直至清代湖北钟祥李潢(? ～1812)出版九章细草图说，对此注作说(解释)作图(22 幅)，人们才能较易理解其义。但是毕竟图形"方圆相缠，浓纤诡互"，要读通它，是要花一番艰辛的功夫。即使有截面图，要作出平易近人的直观图，并非易事。1962 年苏联《阿基米德全集》② 所作牟合方盖图(图 7.7.3)直观性就不够，三上义夫论文第 30 节——刘徽及祖暅之球的算法，对祖暅原注采取一字不漏地分段日译并释，对李潢 22 幅图浓缩为Ⅰ～Ⅷ分图(图 8.7.4)。

他忠实于李潢图及说。我们核对这八种分图，完全采自李图，而且某些对祖注的重要更动也宗李说，例如祖暅注中一句最重要的话："夫叠棋成立积，缘幂势既同，则积不容异。"李潢画龙点睛地把棋字改为幂字，这就更符合刘—祖原理精神，在三上义夫

① 三上义夫. 关孝和の业绩と京阪の算学并に支那の算法上の关系及び比较. 东洋学报，1932～1935，20～22.

② АРХNМЕД. ГИФМП，москва，1962. 573

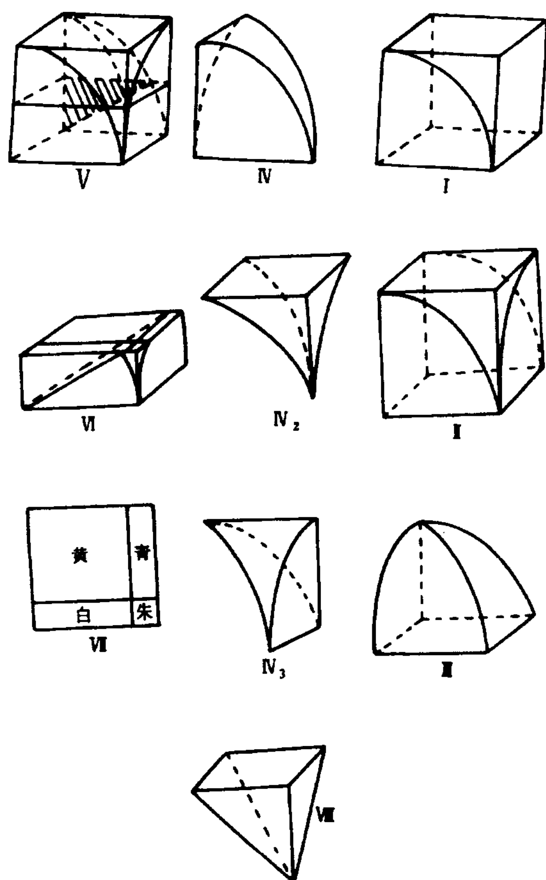


图 8.7.4

的论文里也心领神会地作如此改动。在 30 年代我国出版的两种中国算学史。业师钱宝琮在《中国算学史》(1931 年)仅评说："其得术之由来，则利用勾股术求剖面积，再以商功章求其体积。"未及深究。李俨《中国算学史》(1936 年)因三上论文质量较高，就径

把他的插图作为附图。由此可见：李潢的成果为人因袭，尚且可以作博士学位论文，依此类推，更可以评估6世纪时祖暅的崇高学术造诣。

(二)华道安论文

美国宾州费城学者席文(Sivin N)创办一种不定期刊物《中国科学》(Chinese Science)，旨在宣扬中国传统科学、技术与医学。1978年第3期发表华道安（Wagner D B)(丹麦)论文“刘徽与祖暅之的球体积”，全文六节：序、刘徽和祖暅运用卡伐里列原理、证明摘要、刘徽注的功绩、翻译中的注记、译文。华道安的论文是用西方文字使祖暅立圆术注第一次进入英语世界，其意义是不言而喻的。他的论文写得很踏实、周到，称得上图文并茂。当然也有某些不足之处，例如刘徽、祖暅远在卡伐里列(Cavalieri B，1598～1647)之前，说刘、祖运用卡氏原理，在时间上就不能圆其说了，又如由于汉语水平、中国生活习惯不熟悉原因把牟合方盖误解为：牟(倍)，合(盒)方盖。华道安把原义：“上下相合同的两顶方伞”误认为“两个盒子的方盖”，1984年中国科技史第三届国际会议在北京召开期间，我们曾面对面指出这一细节，华氏虚心接受修正。

四 《五曹算经》

苏联Э·И·别列兹金娜于1960年全文俄译。

五 《缉古算经》

苏联Э·И·别列兹金娜于1975年写出论文“论《缉古算经》”。

附　编　一

我国清代及以前计量制度新考

数学是定量的科学。传世数学经典始自秦汉。古时数学不可能只是纯数(不名数)表示，一般都与相应的量结合一起(名数)，如影随形，不可分割。科学技术史工作者有必要了解各个朝代各种量的计量根本情况。

计量制度是经国大计，自古以来为历代政府重视。历代各种量计量名称、进制易于了解；而由于当时计量原器丧失不全，而所存少数原器也因制作技术条件限制，精度较低，因此各种量基本单位所值就较难考订。正如宋初太常寺官员和岘说："尺寸长短非书可传"[①]，推及其他各种量也是如此。本世纪初以来学人辈出：王国维、吴大澂、马衡、刘复等都从历史文献以及相应文物作科学考察、实验，得到许多重要结果。又30年代吴兆洛综合各家言成《中国度量衡史》[②]一书，但推算多于实测，失实处较多，50年代虽经修订，由于时间仓促等原因，原著缺点并未改正[③]。

新中国建国50年来出土文物之夥、之美史无前例。经考古、文物、历史、博物工作者的整理研究，科学实验手段益为可靠，成果丰硕：先秦以迄明清计量情况借此渐次明确。我们广采历代计量传世原器所值及其旁证材料。只是并列所见，供识者参考。历

---

① 宋史·律历志. 校点本. 北京：中华书局，1977. 1494

② 吴兆洛. 中国度量衡史. 上海：商务印书馆，1937

③ 程理濬. 中国度量衡史. 修订本. 上海：商务印书馆，1957

来有关用乐管定基本单位的象征性论述则一概不录。

一　长度(度)

(一)单位名称及其进制

量长度的单位、原始社会大多取粮食或人身肢体作为标准。有所谓“一粟为一分，有指为寸，有手知尺”等说法。生产发展、商品交流的结果我国远起殷商时代已出现量长度用基本单位——尺。十尺为丈，十寸为尺。《汉书·律历志》在丈、尺、寸三种单位外，又增引、分[①]。十丈为引[②]、十分为寸。引、丈、尺、寸、分称为五度。《九章算术》只见丈、尺、寸三种单位。长度小于一寸，用分数表示，例如一尺七寸半(商功章第 11 题)，少半寸(勾股章第 22 题)，太半寸(勾股章第 23 题)。《九章算术》三国魏人刘徽注在寸下有分、厘、毫、秒、忽五种十进单位。《孙子算经》所用长度单位与刘徽相同，但改称秒为丝，并定义：“蚕吐丝为忽，十忽为丝”。南宋秦九韶《数术九章》(1247 年)在丝忽以下又新设微、沙、莽、轻、清、烟六个单位，都十进。

量纺织品长度，丈以上有匹、端。《左传·昭公二十六年》：“币锦二两”。杜预注：“二丈为一端，二端为一两，所谓匹也。”《九章算术》粟米章第 35 题中：匹作四丈。《孙子算经》卷上：“五十尺为一端，四十尺为一匹。”秦九韶《数术九章》第 10 卷第 7 题中：匹法四丈。可见自古以来一匹都作四丈计。

量地用步、里。古时步行测量，《小尔雅》：“跬，一举足也，倍跬谓之步。”《史记·始皇本纪》：“秦始皇记数，以六为记，六尺为步。”《大戴礼记》：“三百步为里”，《九章算术》同此。秦汉

---

① 汉书·律历志：“以竹为引，高一分，广六分，长十丈。”“引”犹今之卷尺。明程大位《算法统宗》卷首有丈量步车，也是竹制量具，可度量 30～40 步，当为古制。

② 吴大澂．权衡度量实验考．罗氏刊本．1919

以后各朝代里、步、尺换算率不一致，列表如下

表 A1.1　历代里、步、尺换算率比较

时期		秦汉	两晋南北朝	唐		宋		元		明	清
文献		《九章算术》	《孙子算经》	《缉古算经》	《夏侯阳算经》①	《数术九章》第五卷第二题	《数术九章》第六卷第三题	《四元玉鉴》	《辍耕录》②	《算法统宗》	《会典》
一步尺数		6	6	6	5	?	5	5	5	5	5
里	步数	300	300	300	360	300	360	360	240	360	360
	尺数	1 800	1 800	1 800	1 800		1 800	1 800	1 200	1 800	1 800
	米数(约)	415	430	440	530		560		450	570	570

(二)历代基本单位——尺长厘米数

商　安阳殷墟出土有骨尺一支[③]长 16.95，牙尺二支[④]，分别长 15.78，15.8。

西周　无传世原器。吴大澂以所藏西周玉璧，按《周礼·考工记》所记尺寸，反算西周尺长 19.777 875[⑤]。

春秋战国　1932 年在洛阳金村出土铜尺长 23.1[⑥]。罗福颐记 1957 年以前出土文物，其中铜尺四支[⑦]分别长 22.7，23.0，23.0，

---

①　钱宝琮考证今传本《夏侯阳算经》是唐代宗(765～779)时著作，书中所引杂令为唐代刑部所颁。同书田曹、里法步法仍从《九章算术》。

②　陶宗仪《辍耕录》卷二十一宫阙制度："宫城周回九里三十步，东西四百八十步，南北六百十五步"可见元制里法二百四十步。

③⑦罗福颐．历代传世古尺图录．北京：文物出版社，1981

④　国家计量总局等．中国古代度量衡图集．北京：文物出版社，1981

⑤　国家计量总局等．中国古代度量衡图集．北京：文物出版社，1981

⑥　福开森(J. C. Fergusson)．得周尺记．《大公报》艺术周刊，1933(4)

23.1；牙尺一支长 23.0，杨宽从商鞅量反算秦国尺长[1]23.089 64，曾武秀[2]从 50 年代不同地区出土玉简、玉牍长宽反算战国晚期尺长在 22.0 至 22.5 之间；又从 18 辆出土马车轨宽反算尺长在 22.5 至 23.75 之间。

秦　根据商鞅量铭和秦始皇诏书可知秦标准尺也长 23.088 64。

西汉　罗福颐记[3]1957 年以前出土文物，其中铜尺二支、牙尺三支都长 23.3；日本嘉纳氏藏牙尺长 23.38。陈梦家记西汉骨尺一支长 23.2[4]。1968 年河北省满城县出土铁尺长 23.38[5]。1973 年甘肃省金塔县出土竹尺长 23.6，木尺长 23.2[6]。

新　1927 年甘肃省定西县秤钩驿出土新莽铜制丈的原器，按《汉书·律历志》所记该原器尺寸，并经实测折一尺长 23.1[7]。

日本足立喜六据新莽天凤泉币反算，一尺合 23.0[8]，杨宽所得结果是 22.33[9]。

刘复从新莽嘉量斛直径、深度多次实测，取算术平均得一尺长 23.088 64[10]。

吴承洛从乾隆《西清古鉴》卷三十四所记“斛深七寸二分”，按清营造尺换算一尺长 23.04[11]。

---

① 杨宽．中国历代尺度考．上海：商务印书馆，1938

② 曾武秀．中国历代尺度概述．历史研究，1964(3)

③ 罗福颐．历代传世古尺图录．北京：文物出版社，1957

④ 陈梦家．战国度量衡略说．考古，1964(6)

⑤～⑦国家计量总局等．中国古代度量衡图集．北京：文物出版社，1981

⑧ 足立喜六．长安史迹考．杨链译本．北京：商务印书馆，1935

⑨ 杨宽．中国历代尺度考．上海：商务印书馆，1938

⑩ 刘复．故宫所存新嘉量之较量及推算．辅仁学志．1928，1(1)

⑪ 吴兆洛．中国度量衡史．上海：商务印书馆，1937

白尚恕实测新莽始建国元年造四寸卡尺得平均数一尺长24.625[①]。

东汉　罗福颐记铜尺三支，其中二支长23.5，一支长23.6；日本嘉纳氏藏牙尺一支长23.9[②]。1954年广西省贵县出土铜尺长23.0[③]。60年代出土铜尺二支长23.0，23.7[④]. 70年代出土铜尺二支长23.46，23.72；骨尺二支长22.95，23.7[⑤]。

1965年江苏省仪征县出土东汉铜圭表折算一尺长23.0[⑥]。

三国

魏　1972年甘肃省嘉峪关市出土骨尺二支，都长23.8[⑦]。罗福颐记正始弩机望山折合一尺长24.255[⑧]。

《晋书·律历志》魏尺条说："杜夔所用调律比晋前尺一尺四分七厘。"以新莽尺作晋前尺计，魏尺应长23.1×1.047=24.186。

刘徽注《九章算术·商功》："王莽时刘歆斛尺弱于今尺四分五厘，比魏尺其斛深九寸五分五厘。"按新嘉量斛深一尺，照刘注折算魏尺应长23.1÷0.955=24.188。

吴　1964年江西省南昌市出土铜尺长23.5，1979年又出土竹尺卡24.2[⑨]。

西晋　1955年洛阳市晋墓(302年)，出土骨尺长24.0[⑩]，1965

---

① 白尚恕. 王莽卡尺的构造、用法以及在数理上的分析. 中国科技史料. 1981(3)

② 罗福颐. 历代传世古尺图录. 北京：文物出版社，1957

③ 广西省文物管理委员会. 广西贵县汉墓的清理. 考古学报，1957(1)

④ 国家计量总局等.《中国古代度量衡图集》. 北京：文物出版社，1981

⑤ 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

⑥ 南京博物院. 东汉东圭表. 考古. 1977(6)

⑦ 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

⑧ 罗福颐. 历代传世古尺图录. 北京：文物出版社，1957

⑨ 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

⑩ 河南省文物局工作二队. 洛阳晋墓的发掘. 考古学报，1957(1)

年北京市八宝山西晋墓(307 年)出土牙尺长 24.15[①]。

《晋书·律历志》说："(荀)勖其尺曰：'晋秦始十年，中书考古器，揆校今尺，长四分半。" 今尺者，杜夔尺也。按秦始十年即公元 274 年，则西晋尺长 23.1×1.045＝24.139 5。

东晋 1974 年南昌市晋墓出土木尺长 24.5[②]。

《隋书·律历志》晋后尺条说："晋后尺……实比晋前尺一尺六分二厘，……晋氏江东所用"，东晋一尺长应是 23.1×1.062＝24.532 2。

南朝

宋 罗福颐记骨尺一支长 24.7[③]。

《隋书·律历志》宋氏尺条记："实比晋前尺一尺六分四厘。" 宋尺当长 23.1×1.064＝24.578 4。

梁 罗福颐记铜尺四支,分别长 24.75,24.9,24.95,25.15[④]。

《隋书·律历志》梁俗间尺条记:"实比晋前尺一尺七分一厘。" 梁尺当长 23.1×1.071＝24.740 1。

北朝

北魏 中国历史博物馆藏铜尺长 30.9[⑤]。

《隋书·律历志》后魏尺有四种，分别折合 25.581，27.881，27.974，29.591。

北周 无传世实物。《晋书·律历志》记："《世说》称有田父子野地中得周时玉尺，便是天下正尺。"《隋书·律历志》周玉尺条说："实比晋前尺一尺七厘。" 北周尺当长 23.1×1.007＝23.261 7。

---

① 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

② 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

③ 罗福颐. 历代传世古尺图录. 北京：文物出版社，1957

④ 罗福颐. 历代传世古尺图录. 北京：文物出版社，1957

⑤ 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

隋　故宫博物院藏隋尺长 29.67[①]。

《隋书·律历志》："后魏后尺实比晋前尺一尺二寸八分一厘……开皇初著令以为官尺，有司用之，终于仁寿。"即隋初(开皇元年至仁寿四年,即 581～604)用尺长 23.1×1.281=29.591。

文献记载隋炀帝好古，大业三年(607 年)四月又复古制。

唐　中国历史博物馆藏铜尺三支，分别长 29.9，30.4，31.1；上海博物馆藏牙尺一支长 30.23[②]。日本正仓院藏牙尺二支，分别长 29.7，30.3[③]，1956 年西安市出土铜尺长 31.0，1956 年武汉市出土铜尺长 29.71，1966 年、1973 年在新疆自治区阿斯塔那先后出土木尺三支分别长 29.0，29.3，29.5[④]。1955 年长沙市出土铁尺长 29.5[⑤]，1956 年河南省陕县出土铜尺长 29.0[⑥]。

王国维据《新唐书·食货志》："武德四年铸开元通宝，径八分，"累开元钱 12 枚半测唐尺长 31.0[⑦]。日本足立喜六用同法测唐尺长 30.3[⑧]。

曾武秀从文献及今测唐长安城遗址边长折算唐尺分别得 29.48，31.04[⑨]。

宋　中国历史博物馆藏铜尺二支分别长 30.9，31.6；木尺二

---

① 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

② 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

③ 伊东俊太郎. 科学技术史事典. 1983

④ 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

⑤ 湖南省文物管理委员会. 长沙丝茅冲清理的唐代砖室墓. 文物参考资料，1956(2).

⑥ 黄河水库工作队. 1956 年河南陕县刘家渠汉唐墓发掘简报. 考古通讯，1957(4).

⑦ 王国维. 日本正仓院藏六唐尺摹本跋. 观堂集林

⑧ 足立喜六. 长安史迹考. 杨铼译本. 北京：商务印书馆，1935.

⑨ 曾武秀. 中国历代尺度概述. 历史研究，1964(3)

支，都长 32.9，另一支长 30.9[①]。1964 年南京市孝卫街出土木尺长 31.4[②]。1965 年武汉市十里铺出土木尺长 31.2，1973 年苏州市横塘出土木尺长 31.7，1975 年湖北省江陵县出土木尺长 30.8[③]。

蔡元圭《律吕新书》温公尺图说记宋大府布帛尺比晋前尺一尺三寸五分。宋一尺当长 $23.1\times1.35=31.185$。

沈括《梦溪笔谈》辨证一："予考乐律，及受诏改铸浑仪，求秦汉以前度量斗升……，古尺二寸五分十分分之三，今尺一寸八分百分分之四十五强"。据此宋一尺当长 $23.0\times\frac{2\ 530}{1\ 845}=31.53$。

元　元尺无实物传世，也无文献可考其实长，正如明郎瑛《七修类稿》卷二十七述历代尺度时说："元尺传闻至大，志无考焉。"陶宗仪《辍耕录》记元代宫城尺寸，明初曾实测尺寸。借此二种数据曾武秀反算元尺长达 37.4[④]。

明　故宫博物院藏嘉靖牙尺长 32.0[⑤]。

1956 年山东梁山县出土明初木船上骨尺长 31.8[⑥]。

朱载堉《律吕精义》："宝钞黑边外齐为一只，名曰今尺，……即今工部营造尺也。"杨宽说："据明宝钞较量，钞尺正与嘉靖牙尺同。"又说："嘉兴瞿氏藏有一万历尺，洪武钞之高正当此尺一尺"。[⑦]

清　康熙《律吕正义》："躬亲累黍布算……纵累百黍之尺为营造尺。"此尺原器至清末已失去。吴兆洛说："仓场衙门存康熙三十四年铁斗，其面底方寸之度与钦定《律吕正义》所图营造尺

① 罗福颐. 历代传世古尺图录. 北京：文物出版社，1957

② 南京博物院管玉春. 南京孝卫街北宋墓出土木尺. 文物，1982(8)

③ 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

④ 曾武秀. 中国历代尺度概述. 历史研究，1964(3)

⑤ 国家计量总局等. 中国古代度量衡图集. 北京：文物出版社，1981

⑥ 刘桂芳. 山东梁山发现的明初兵船.《文物参考资料，1958(12)

⑦ 杨宽. 中国历代尺度考. 上海：商务印书馆，1938

之度若合符节。”[①] 宣统二年(1909 年)与法国米尺相比较，清营造尺一尺长 32.0。

二　地　积

我国古代面积单位用平方尺(丈、寸)，量地面积(地积)单位用平方步、亩、顷。但在记量时平方尺(步、丈、寸)前不冠平方字样，例如“今有积五万五千二百二十五步，问：为方几何?”(《九章算术》少广章第 12 题)

《汉书·律历志》：“古者建步立亩，六尺为步，步百为亩。”这是说先秦一亩作一百平方步。秦孝公时商鞅废井田制，开阡陌，改一亩作二百四十平方步，百亩为一顷。《九章算术》承秦制，宋时亩及方步间设角，一亩四角。又另有十进制：亩下设分、厘、毫、丝、忽五种导出单位。宋制沿用到清代。各朝代亩值见表 A1.2。

表 A1.2　历代亩值比较

时期	先秦	秦汉	两晋南北朝	唐	宋	元	明	清
方步数	100	240	240	240	240	240	240	240
平方米数(约)	190	460	520	570	600	840	610	615

① 吴兆洛. 中国度量衡史. 上海：商务印书馆，1937

三　容　　积(量)

(一)单位名称及其进制

我国古代体积单位用立方尺(丈、寸)，量谷物、液体(容积)单位用升(斗、斛等)，但在记量时立方尺(丈、寸)前不冠立方字样。例如“今有积一百八十六万八百六十七尺，问：为立方几何?”(《九章算术》少广章第19题)在尺字后刘徽注说:“此尺谓立方之尺也。凡物有高深而言积者，曰立方。”

我国容量基本单位为升[①]。先秦升以上有四量《左传·昭公三年》：“齐旧四量：豆、区、釜、钟。四升为豆，各自其四，以登于釜。釜十则钟。”这是说升、豆、区、釜(斛)四进，而十釜为钟。借此刘徽计算先秦一釜(斛)合1 562 $\frac{1}{2}$立方寸(《九章算术》商功章第25题刘注)，《汉书·律历志》量制改为斛、斗、升、合、龠，合称五量。其中由合至斛都十进，而二龠为合。《九章算术》只有斛、斗、升三种单位，不足一升以其分数表示，如“今有麦八斗六升七分升之三。”(粟米章第30题)刘徽注《九章算术》升下合、龠俱用，如商功章第25题注云:“容十斗四合一龠五分龠之三也。”《孙子算经》在合以下改设勺、抄、撮、圭四种导出单位，都十进制。并定义“六粟为一圭”。宋时因升值增益，十斗称石，五斗称斛，宋制经元、明沿用至清。

(二)各代基本单位——升容毫升数

春秋战国　上海博物馆藏秦孝公时商鞅方升之一、容202.15(马承源测容201.0)[②]，方升之二唐兰测容199.7。[③]中国历史博物馆藏战国右里铜量(升)容206.0，(五升)容1 025.0，折合

① 吴兆洛. 中国度量衡史. 上海：商务印书馆，1937

② 马承源. 高量方升和战国量制. 文物，1972(6)

③ 唐兰. 商鞅量与商鞅量尺. 国粹季刊，1935，5(4)

升容 205.0。1972 年江苏省铜山县出土楚铜量(五升)容 200.0，1976 年安徽省凤台县出土楚铜量(五升)容 1 110.0，折合升容 222.0，又湖北省云梦县出土楚陶量(一斗)2 000.0 折合升容 200.0。[①]

1932 年出土东周铜钫，折合升容 199.75。[②]陈梦家测铜量四器，折合升容 184.4，204.6，205.8，207.0；陶量一器，折合升容 211.0。[③]

吴大澂从所推算的周尺计算《周礼·考工记》所说："栗氏为量鬴(釜)深尺，内方尺而圆其外"升容为

$$\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2\times1.0\times19.977\ 175^3\div64=195.69$$[④]。

秦　上海博物馆藏始皇诏铜方升容 215.65，中国历史博物馆藏始皇诏铜方升容 210.0，此外传世秦代量器 14 种折合升容：其中二器为 194.0，一器为 195.0，二器为 196.0，四器为 198.0，四器为 200.0，一器为 205.0。[⑤]

1982 年江苏省东海县出土秦父子诏铜量(升)容 203.1。[⑥]

西汉　天津艺术博物馆藏上林共府铜升容 200.0，西安市文物商店藏渑池宫铜升容 198.0，此外西汉量器六件折合升容：其二件为 200.0，其余四件分别为 194.0，196.0，201.0，204.0。[⑦]

新　刘复测新莽律嘉量斛容 20 097.5，折合升容约 200.98[⑧]，马衡测为 19 968.753，折合升容约 199.69[⑨]。中国历史博物馆藏

---

①⑤⑦　中国古代度量衡图集。

②　朱德熙. 洛阳金村出土方壶之校量. 北京大学学报，1956(4)

③　陈梦家. 战国度量衡概说. 考古，1964 (6)

④⑧　刘复. 故宫所存新嘉量之较量及推算.

⑥　李洪书. 东海出土秦父子诏铜量. 文物，1984(11)

⑨　马衡. 凡将斋金石丛稿. 1977

始建国铜方升容 197.824。漯仓平斛容 19 375.32，折合升容约 193.75。[10]此外新莽量器六件折合升容都是 200.0。[11]

东汉　1953 年甘肃省古浪县出土建武十一年(35 年)大司农铜斛容 20 196.346，折合升容约 201.96[12]。1815 年河南省睢州出土光和二年(179 年)大司农铜斛容 20 400，折合升容 204.0，此外东汉量器三件折合升容分别为 203.0，204.4，205.0[13]。

三国

魏　无传世原器。

据刘徽注《九章算术》商功章："当今大司农斛周径一尺三寸五分五厘，深一尺，积一千四百四十一寸十分寸之三" 按刘注尺寸折成魏尺长厘米数，魏大司农斛容

$$13.55^2 \times 10 \times 2.4188^3 \times \frac{\pi}{4} = 20\ 406.491 \text{ 毫升。}$$

魏升容约 204.06。

南北朝　无原器传世。杜佑《通典》："六朝量三升当今一升。" 吴兆洛说[14]："六朝者，吴、东晋、宋、齐、梁、陈均行古制……则杜氏以唐制与六朝比较，实即无异与新莽制比较。" 按即升容约 200.0。

隋　日本山下泰藏有隋太府寺(大业三年五月十八日太府寺造，司农司校)合[15]，合容 19.91，折合升容 199.1。

《隋书·律历志》："开皇以古斗三升为一升。大业初依复古斗。" 据此开皇时一升容约 600.0，大业初一升容约 200.0。

---

⑩ 张德光．漯仓平斛．文物，1963(11)

⑪ 中国古代度量衡图集

⑫ 文物出版社．全国基本建设出土文物图录．第一百器．1957

⑬ 中国古代度量衡图集。

⑭ 中国度量衡史，1937

⑮ 容庚．海外吉金录．1933

唐　无原器传世。按杜佑《通典》说法，唐升容约600。而据王孝通《缉古算经》斛法二尺五寸，每寸按3.03厘米计，折升值

$$2500\times3.03^3=69\ 545.317。$$

折合升容695.45，似过大。

宋　无传世原器。

《宋史·律历志》："太祖受禅，诏有司精考古式，作为嘉量，以颁天下。其后定西蜀、平岭南，复江表，泉、浙纳土，并、汾归命。凡四方斗、斛不中式者，皆去之。"吴兆洛说[①]："所谓精考古式，当系唐代嘉量。"宋升容当为600.0。

沈括《梦溪笔谈》辨证一有二处论宋量："汉人有饮酒一石不乱，……汉之一斛，亦是今之二斗七升"，借此折合宋升容

$$\frac{200}{0.27}=740.74。$$

"予考乐律，及受诏改铸浑仪，求秦汉以前度量斗升，计六斗当今一斗七升九合"，借此折合则宋升容

$$\frac{200\times6}{1.79}=670.39。$$

嘉定九年(1216年)安徽宁国府造文思斛(五斗)径一尺、深一尺二寸八分。[②]借此折合宋升容约

$$\frac{\pi}{4}10^2\times12.8\times3.1^3\div50=598.983\ 59\doteq600.0。$$

元　无原器传世。

《元史·律历志》："至元二十年(1283年)崔彧上言：'宋文思院……斛，出入官粮，无所容隐，所宜颁行，上从之，遂颁行。'"据此元升容与宋文思斛折升容相同，即约600.0。

明　中国历史博物馆藏成化(1465～1487)铜斗折合升容

① 中国度量衡史，1937

② 永乐大典．卷七五一二仓字韵三一．续宣城志．北京：中华书局

960.0。

明《会典》对度量衡制造、管理记述甚详，而于具体尺度反而不置一字，当时国家所颁标准原器——铁斛在清《三通考辑要》有记："斛口内方一尺一寸五分强，底内方一尺九寸二分，深一尺二寸八分。"① 据此明升容

$$\frac{1}{3}(11.5^2+19.2^2+11.5\times19.2)\times12.8\times(3.2\times0.81)^3\div50$$

$\doteq 1\,072.4$。

朱载堉《乐律全书·律学新说》记明斛"口内方九寸，底内方一尺五寸，深一尺。"据此明升容②

$$\frac{1}{3}(9^2+15^2+9\times15)\times10\times3.264^3\div50=1\,022.345\,7。$$

清　今存康熙三十四年十月造户部铁方升容 1 043.0③。

清《会典》："户部铸铁为式，形方，升积三十一寸六百分。面底方四寸，深一寸九分七厘五毫。"据此计算清升容

$$4\times4\times1.975\times3.2^3=31.6\times3.2^3=1\,035.468\,8。$$

三、质量(衡)

(一)单位名称及其进制

先民以原粮重为标准，例如"一黍之重积而为铢两。"先秦已有铢、两、斤、钧、石单位名称，《汉书·律历志》正名为五权。《九章算术》所用五权及其进位是：

1 石 4 钧，1 钧 30 斤，1 斤 16 两，1 两 24 铢。

《孙子算经》卷上铢下又设累，并定义"十黍(重)为一累。"唐制、两下改设钱、分、厘、毫、丝等五个导出单位，都十进，沿

---

① 按横黍尺即 0.81 竖黍尺(营造尺)计算。

② 按宝源局量地铜尺(32.64 厘米)计算。

③ 中国古代度量衡图集。

用至清。元朱世杰《算学启蒙》衡制从《孙子算经》，而在斤、钧之间增设秤："十五斤为一秤。"明程大位《算法统宗》衡制从《算学启蒙》，又增设引："二石为引。"

（二）各代基本单位——斤重克数

春秋中国历史博物馆藏齐国原器，右伯君铜权（斤）重 198.4，1975 年江陵县出土楚国原器铜环权（斤）重 224.0 至 227.2。[①]

战国 1954 年长沙市出土楚铜环权（斤）重 250.0，1958 年湖南省常德县出土楚铜环权（斤）重 249.6，1975 年江陵县出土楚铜环权（斤）重 250.0。[②]

中国历史博物馆藏司马秳铜权（钧）重 30 350 克，折合斤重 252.92，陕西省博物馆藏高奴秳铜权（钧）重 30 750 克，折合斤重 256.25。[③]

丘光明实测记重战国文物 89 件折合斤重，其中秦器 84 件平均为 250.0，楚器 4 件平均为 250.0，卫器为 251.0。[④]

1978 年河北省易县燕下都金饰 8 件折合斤重平均为 248.48。[⑤]

秦 1967 年甘肃省秦安县出土两诏铜权（斤）重 250.4，1973 年陕西省临潼县始皇陵区出土两诏铜权（斤）重 247.5。[⑥]

另据出土秦权 25 件折合秦斤重

240.6，248.0，249.0，249.4，249.6，249.8，250.0，251.3，252.0，252.4，252.9，253.0，253.6，254.2，255.2，255.6，256.3，257.9，260.9，261.6，261.9，262.5，265.1，268.8，273.8。[⑦]

吴大澂以秦半两钱八枚测算秦斤重 258.276 9 又以记重秦权比较说："不爽毫发"。[⑧]

---

①②③⑤⑥⑦⑧　中国古代度量衡图集。

④　丘光明．试论战国衡制．考古，1982(5)

西汉 旅顺博物馆藏武库铜权(斤)重 252，1960 年内蒙古自治区呼和浩特市出土铁权(斤)重 249.23。[①]

《汉书·食货志》："黄金方寸，而重一斤。"据此反算斤值约

$$19.32\times2.34^3=247.5453\doteq248。$$

另据西汉铁权六件折算斤重分别为

238.3，244.3，245.3，246.2，248.3，249.9。[②]

新 1927 年甘肃省定西县秤钩驿新莽衡原器四件，其中石权二件折合斤重为 249.6，299.5；九斤权二件折合斤重为 222.28，246.98。[③]

1973 年成都市出土新莽铜环权八件，折合斤重分别为

241.0，241.2，241.6，243.4，246.3，246.9，249.6。[④]

刘复对新律嘉量斛铭"其重二钧"算得斤重 226.67[⑤]。

吴大澂从新莽货币折斤值 218.79[⑥]，吴承洛用同样方法折斤值 222.73。[⑦]

东汉 中国历史博物馆藏光和二年(179 年)大司农铜权(十二斤)折斤重 249.7,1956 年四川省大足县出土铜权(四斤)折斤重 257.0[⑧]。

晋 无原器传世。

《孙子算经》有六种物质密度，其中新定方寸铜重七两半，反算斤重

$$8.93\times2.45^3\times16\div7.5=280.161\ 48。$$

铅重九两半，反算斤重

$$11.34\times2.45^3\times16\div9.5=280.871\ 5。$$

南北朝 无原器传世。

---

①②③④⑦⑧ 中国古代度量衡图集。

⑤ 刘复，故宫所存嘉量之较量及推算。

⑥ 吴大澂，权衡度量实验表。

《隋书·律历志》："梁陈依古，齐以古称一斤八两为一斤。周玉称四两为古称四两半。"这就是齐一斤约重 370，周一斤约重 280。

隋　中国历史博物馆藏隋铁权(斤)重 693.1[①]

《隋书·律历志》："开皇以古秤三斤为一斤"。借此可检定新莽斤值，又"大业中，依复古秤"。

唐　无原器传世。

《新唐书·食货志》："武德四年，铸开元通宝钱，径八分，重二铢四絫，积十钱重一两"吴大澂以所藏开元钱 10 枚重 37.301 克，得唐斤重 598.816。[②]

宋　1975 年湖南省湘潭市出土嘉祐(1056～1063)铜则[③](百斤)折合斤重 640.0。

沈括《梦溪笔谈》辨证一有四处论宋衡器："钧石之名五权之名，……凡石者以九十二斤半为法，乃汉秤三百四十一斤也。""弓有挽三石者乃古之三十四钧。""汉有饮酒一石不乱……(汉石)一百二十斤以今秤计之，当三十二斤。""予考乐律及受诏改铸浑仪，求秦汉以前度量斗升……秤三斤当今十三两。"说明宋时斤重于秦汉之斤，其比率依次为

$341\div92.5=3.6864$，　$34\times40\div3\times120=3.7778$，

$120\div32=3.75$，　$3\times16\div13=3.6923$。

表达方式不一样，而比率很接近，可信。

元、明　均无原器传世。

清　康熙皇帝手订清衡制已无原器传世。今存康熙主编《数理精蕴》下编卷 30 记各体权度比例，从其中少数比较稳定金属密度反算，可知清斤约重。从每立方寸赤金重十六两八钱得斤重 602.93，纹银九两得斤重 611.09，生铁六两七钱得斤重 615.06，

---

①②③中国古代度量衡图集.

倭铅(锌)六两得斤重604.68。

乾隆《律吕正义》后编:“权制形圆,砝码为扁平形,上下面平,质用黄铜,以推定轻重之率。黄铜方一寸,重六两八钱。”黄铜本身为铜锌合金,没有恒定比重,乾隆时斤值很难推算。

咸丰八年(1858年)《天津条约》后产生海关度量衡,规定中国100斤折法国60.453千克,折合斤重604.53。又规定中国100斤折英国133.3磅,折合斤重604.64。

光绪三十四年(1908年)农工商部和度支部划一度量衡制度定库平一两等于37.301克,即斤值596.816。[1]

四 时 间

一回归年颛顼历(秦始皇时颁行,我国第一部历法)定为 $365\frac{1}{4}$ 日,以后精度逐渐提高,天文学史有专门记载,不赘述。

关于时间计量、《九章算术》平年作12月(大月作30日,小月作29日),共计6个大月、6个小月,因此一平年作354日计。《九章算术》衰分章第19题:“今有取保一岁作价钱二千五百文。今先取一千二百文,问当作日几何?”每年即以354日计,得数 $169\frac{23}{25}$ 日。

一日作十二时辰,用十二地支命名。其中子正即今午夜零时正,子初在半夜十一时正,子末在凌晨一时正,余类推。白天从卯初(即寅末)起算,到未末(即酉初)终止,白天作六个时辰计。《数书九章》第二章第七题术文说:“其酉初为夜,……自卯初数至辰末得二时”可证。

日以下导出单位为刻、分、秒、小分四种,都一百进,如

① 吴承洛《中国度量衡史》反推自唐至清斤值都用596.816,源于此。

《数书九章》第二章第一题题文说："十一日三十八刻二十分八十一秒八十小分"即 11.382 081 80 日。

意大利传教士利玛窦 Ricci P M(1552～1610)1583 年来中国，1601 年到北京向万历皇帝进呈包括自鸣钟在内的供物，颇得赞赏，可以认为从此开始我国开始一日以 24 小时计时，时下 60 进细分为分为秒。

五　角　　度

《周髀算经》载东、南、西、北四正向，又明确指出全圆周分 $365\frac{1}{4}$度。不足一度用分数表示，如"东井出中正表西三十度十六分度之七。"《海岛算经》除四个正向外，又增东北、东南、西南、西北四方向。从答案检查，这四个方向都严格与四个正向成 45°角。《数书九章》全圆周分 $365\frac{1}{4}$度。度下设分、秒、小分、小秒、微分五种单位，都百进，例如第一章第 4 题说："得空度一十四分四十八秒三十九分小分七十七小秒四十微分。"这就是 0.144 839 774 0度。

瑞士国教士邓玉函 Terrenz P J(1578～1630)1621 年来华，参加编纂《崇祯历书》。著《大测》二卷。可以认为是我国分圆周为 360 度，度下细分(六十进制)为分、为秒的起步。

附　编　二

敦煌遗书选(数学)

一　算经一卷并序[①] (P3349,S19,S5779)

(一)夫算者：天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之平均，皇极之终始，万物之祖宗，六艺之纲纪，群伦之聚散。考元气于奸宄，推四时之运移，记精微之肇(下 12 字原卷残)推方圆，合规矩，均尺丈，制法度，立权衡，平斛升，剖毫厘，析黍参，历亿载而不朽。但行之者富贵有余，背之者贫且贱(下 13 字残)。盖意明情乐者，安有不成哉。

昔鲁人请算(下 13 字残)言人不解算者，如天无日月，地无泉源，人无眼(下 10 字残)识。

(二)凡算者正身端坐，一从右膝而起，先识其位。一纵十横，百立千僵。万百相似，千十相望。六不积聚，五不单张。算乘之法，十步至十，百步至百，千步至千，万步至万。乘除之法，言十自过，不满自当，相乘至尽则已。九九八十一，八九七十二，七九六十三，六九五十四，五九四十五，四九三十六，三九二十七，二九十八，一九如九。八八六十四，七八五十六，六八四十八，五

① 据“黄永武. 敦煌宝藏. 第127册. 台湾：台湾新文丰出版公司，1982. 536～538”核对，并改为简体字并加注标点符号. 对原件又加注段号，第六段十题加注 1～10 题题号。

八四十，四八三十二。三八二十四，二八十六，一八如八。七七四十九，六七四十二，五七三十五，四七二十八，三七二十一，二七十四，一七如七。六六三十六，五六三十，四六二十四，三六十八，二六十二，一六如六。五五二十五，四五二十，三五十五，三四十二，二四如八，一四如四。三三如九。二三如六，一三如三。二二如四，一二如一。一一如一。

(三)凡数不过十，名不过万，故万万即改。一、十、百、千、万、一万、十万、百万、千万、万万曰亿。一亿、十亿、百亿、千亿、百亿、十万亿、百万亿、千万亿、万万亿曰兆。一兆、十兆、百兆、千兆、万兆、十万兆、百万兆、千万兆、万万兆曰京。一京、十京、百京、千京、万京、十万京、百万京、千万京、万万京曰该。一该、十该、百该、千该、万该、十万该、百万该、千万该、万万该曰梓。一梓、十梓、百梓、千梓、万梓、十万梓、百万梓、千万梓、万万梓曰让。一让、十让、百让、千让、万让、十万让、百万让、千万让、万万让曰沟。一沟、十沟、百沟、千沟、万沟、十万沟、百万沟、千万沟、万万沟曰间。一间、十间、百间、千间、万间、十万间、百万间、千万间、万万间曰政。一政、十政、百政、千政、万政、十万政、百万政、千万政、万万政曰载。一载、十载、百载、千载、万载、十万载、百万载、千万载、万万载曰极。右孙子数，钱满载，天不容，地不载，故以载为极末也。

(四)凡度之所起，起于忽，从蚕口中吐丝为一忽，忽者如一蚕丝之广。十忽为一丝，十忽为一毫，十毫为一厘，十厘为一分，十分为一寸，十寸为一尺，十尺为一丈。四丈为一匹，五丈为一端，十丈为引。方丈曰堵。五尺曰步，六尺为寻，七尺为常。八尺为一仞，五尺为一步。二百四十步为一亩，一百亩为一顷。(下匹化为丈、尺、寸、分、厘、毫、丝、忽，尺、寸、分、厘、毫、丝分别化为小的导出单位不录)又据大唐令文：诸以北方秬黍中者，黍之广为

分。

凡升量所起，起于圭。六黍为一圭，十圭为一抄，十抄为一撮，十撮为一勺，十勺为一合、十合为一升、十升为一斗，十斗为一斛。(解文后斛、斗、升等化为小的导出单位不录)或云六粟为一圭。今云二十黍为一圭。方一尺深一尺六寸二分受一石。

秤之所起，起于黍。黍者如一黍之重。十黍为一参，十参为一铢，二十四铢为一两，十六两为一斤。三十斤为一钧。四钧为一石(下石、钧、斤、两、铢化为小的导出单位不录)。

(五)九九八十一，自相乘得六千五百六十一，九人分之得七百二十九。八九七十二，自相乘得五千一百八十四。八人分之得六百四十八。七九六十三，自相乘得三千九百六十九，七人分之得五百六十七。六九五十四，自相乘得二千九百一十六，六人分之得四百八十六。五九四十五，自相乘得二千二十五，五人分之得四百五。四九三十六，自相乘得一千二百九十六，四人分之得三百二十四。三九二十七，自相乘得七百二十九，三人分之得二百四十三。二九十八，自相乘得三百二十四，二人分之得一百六十二。九九一凡总得三百九十六，自相乘得一十五万六千八百一十六。八八六十四，自相乘得四千九十六。八人分之得五百一十二。七八五十六，自相乘得三千一百三十六，七人分之得四百四十八。六八四十八，自相乘得二千三百四，六人分之得三百八十四。五八四十，自相乘得一千六百，五人分之得三百二十。四八三十二，自相乘得一千二十四。四人分之得二百五十六。三八二十四，自相乘五百七十六，三人分之得一百九十二。二八十六，自相乘二百五十六，二人分之得一百二十八。八八一九总得二百八十，自相乘得七万八千四百。七七四十九，自相乘得二千四百一，七人分之得三百四十三。六七四十二，自相乘得一千七百六十四，六人分之，得二百九十四。五七三十五，自相乘得一千二百二十五。五人分之，得二百四十五。四七二十八，自相乘得七百八十

四，四人分之，得一百五十六。三七二十一，自相乘，得四百四十一，三人分之，得一百四十七。二七十四，自相乘得一百九十六，二人分之，得九十六。七七一凡总得一百八十九，自相乘得三万五千七百二十一。六六三十六，自相乘得一千二百九十六，六人分之得二百一十六。五六三十，自相乘得九百，五人分之，得一百八十。四六二十四，自相乘得五百七十六，四人分之，得一百四十四。三六十八，自相乘得三百二十四，三人分之，得一百八。二六十二，自相乘得一百四十四，二人分之，得七十二。六六一凡总得一百二十，自相乘得一万四千四百、五五二十五，自相乘得六百二十五，五人分之，得一百二十五。四五二十，自相乘得四百，四人分之，得一百。三五十五，自相乘得二百二十五，三人分之，得七十五。二五如十，自相乘得一百，二人分之得五十。五五一凡总得七十，自相乘得四千九百。四四十六，自相乘得二百五十六，四人分之，得六十四。三四十二，自相乘得一百四十四，三人分之，得四十八。二四如八，自相乘得六十四，二人分之得三十二。四四一凡总得三十六，自相乘得一千二百九十六。三三如九，自相乘得八十一，三人分之得二十七。二三如六，自相乘得三十六，二人分之，得十八。三三一凡总得十五，自相乘得二百二十五。二二如四，自相乘得十六，二人分之，得八。

(六)均田法第一

1. 今有方田［方］四十九步，问：为田几何？曰：十亩余一步。术曰：以四十九步自相乘得一千四百一步，以亩法二百四十步除之，即得十亩余一步。

2. 今有直田。广六十步，长九十步。问：为田几何？曰：二十二亩半。术曰：列广六十步，以长九十步乘之，得五千四百步，以二百四十步除之，即得二十二亩半。

3. 今有圆田。周一百二十步。问：为田几何？曰：五亩。术曰：以周自乘得一万四千五百步。又以十二除之，得实步一千二

百步。以二百四十步除之，即得五亩。

4. 今有四不［等］田。南头广七十五步，北头广六十九步；东畔长百八步，西畔长百二十步。问：为田几何？曰：三十四亩余四十八步。术曰：以南头广七十五步并北头广六十九步并之得一百四十四步，半之得七十二步。置之于上方；又置西畔长百二十步并东畔长百八步，得二百二十八步，半之得一百一十四步，以一百一十四步乘上方七十二步得八千二百八步。以亩法除之，即得。

5. 今有蛇田。南头广二十二步，北头广一十四步。中央广六十三步；长一百四十步。问：为田几何？曰：十九亩，余六十步。术曰：并三广，三分而一分。以长乘之得积步。以亩法除之，即得亩数。置南头广二十二步，中央六十三步、北头一十四步，并之，得九十九步。以三除之，得三十三步。以三十三乘长一百四十步，得四千六百二十，以二百四十步除之，得十九亩余六十步。

6. 今有环田。(正圆内空，形如玉环)外周一百二十五步，内周十五步，径十二步。问：为田几何？曰：三亩余百二十步。术曰：并内外周，折之以乘径得积步。以亩法二百四十步除之，即得。置外周一百二十五步，以内周十五步并之，得一百四十步，折之得七十步，以径十二乘之，得八百四十步，以亩法除之，得三亩余一百二十步。

7. 今有角田，本粗末细，外曲长，内曲短，如牛角。南头四十步，北头三十步，外曲六十步，内曲四十二步。问：为田几何？曰：七亩余一百五步。术曰：并两头，又并内外曲，各折而半之，以相乘得积步。以法除之，得亩数。置南头四十步，北头三十步，并之得七十步。半之，得三十五步，置于上方。又置外六十步，内四十二步，并之得一百二步，半之得五十一步。以五十一步乘上三十五步，得一千七百八十五步。以二百四十步除之，得七亩余一百五步。

8. 今有箕田(形如发箕文)掌广六步，舌广二十步；长三十步。问：为田几何？曰：一亩余一百五十步。术曰：并掌、舌，二为一，以乘长，得积步。以亩法除之。置南头六步、北头二十步，并之得二十六岁，半之，得一十三步。以长三十乘之，得三百九十步，以二百四十除之，得一亩、余一百五步。

9. 今有圭田(形如三角，尖如圭)北头广七十四步，南头无广，长一百八十步，问：为田几何？曰：二十七亩、余一百八十步。术曰：折广、以长［乘之］得积步。以法除之即得。置北头广七十四步，半之得三十七步，以长一百八十步乘之，得六千六百六十步。以二百四十步除之，得二十七亩、余一百八十步。

10. 今有鼓田(形如大鼓)南头七十四步，北头七十四步，中央一百六十步。长一百四十步。问：为田几何？曰：六十亩、余二十步。术曰：并三广，三分而一，以乘长得积步。以亩法除之，即得。置南头七十四步、北头七十四步、中央一百六十一步，并之得三百九步。三分而一得一百三步。以长一百四十除之，得一万四千四百二十步。以二百四十除之，得六十亩，余二十步。

二　算书[①] (残,P2667)

1. 今有男十万八百一十五人：三万六千七百八十三人，丁男，日食米八升；二万五千五百二十八人，老男，日食米七升；一万八千二百一十四人，中男，日食米六升；一万四千一百五十四人，小男，日食米五升；六千一百三十六人，黄男，日食米四升。问前件五等男一日、十日、一月、一年之食米各几何？曰：一日合食米六千七百七十五斛，五斗，八升，十日合食米六万七千七百五十五斛八斗，一月食米二十万三千二百六十七斛四斗，一年食

① 据“黄永武. 敦煌宝藏. 第123册. 台湾：台湾新永丰出版公司，1982. 198”核对，并改为简体字，加注标点符号. 又加注1～13十三题题号。

米二百四十三万九千二百八斛八斗。

术曰：置丁男三万六千七百八十三人，以八升乘之，退二等，得丁男一日食二千九百四十二斛六斗四升，置于上方。次置老男二万五千五百二十八人，以七升乘之，退二等，得老男一日食米一千七百八十六斛九斗六升，置于上方。次置中男一万八千二百一十四人，以六升乘之，退二等，得中男一日食米一千九十二斛八斗四升，置于上方。次置小男一万四千一百五十四人，以五升乘之，退二等，得小男一日食七百七斛七斗，亦置于上方。次置黄男六千一百三十六人，以四升乘之，退二等，得黄男一日食二百四十五斛四斗四升。总并五位，得各男一日食六千七百七十五斛五斗八升；上十之，得十日之食六万七千七百五十五斛八斗；又以三因之，得一月之食，二十万三千二百六十七斛四斗；又以十二乘之，得一年之食，二百四十三万九千二百八斛八斗。

2. 今有马七万八千九百八十五匹。三万二千三百二十三匹上马，日给粟五升；二万四千三百四十一匹中马，日给粟四升；二万二千三百二十一匹下马，日给粟三升。问前件三等马一日、十日、一月、一年之食粟各几何？曰：一日合食粟三万二千五百九十四斛二斗，十日合食三十二万五千九百四十二斛，一月食九十七万七千八百二十六斛，一年食一千一百七十三万三千九百一十二斛。

术曰：置上马三万二千三百二十三匹，以五升乘之，退一等，得上马一日食粟一万六千一百六十一斛五斗，置于上方。次置中马二万四千三百四十一匹，以四升乘之，退一等，得中马一日食粟九千七百三十六斛四斗，亦置上方。次置下马二万二千三百二十一匹，以三升乘之，退位一等，得下马一日食粟六千六百九十六斛三升。总并三位得都合一日食粟三万二千五百九十四斛二斗，上十之，得十日都食三十二万五千九百四十二斛，又以三因之，得一月都合食粟九十七万七千八百二十六斛，又以十二乘之，得一

年都合食粟一千一百七十三万三千九百十二斛。

3. 今有壍广八尺，下无广，深八尺，长七百三十五尺，问千尺为一方，凡得几何方？曰二十三方，不尽五百二十尺。术曰，先张长七百三十尺，深次，广八尺，半之，得四尺，以四尺乘之，得二千九百四十尺，深八尺乘之，得二万三千五百二十，以一千尺于下除之，即得。

4. 今有堤下广五丈，上广三丈，高二丈，长六十尺，限用一千二百人，一日人二尺。问：凡用几何日得了？曰：二十日得了。术曰，置上广三十尺，下广五十尺并之得八十尺，半之得四十尺，以高二十尺乘之，得八百尺。复以其长六十尺乘之，得四万八千尺于上。次列一千二百尺一日二尺乘之，得二千四百尺，以二千四百尺除上位，即得。

5. 今有屋东西长六丈，广三丈。尺、用瓦二枚。问总得几何瓦？曰：三千六百枚。术曰，以广三十尺乘长六十尺得积尺一千八百尺，以瓦二枚乘得三千六百枚。

6. 今有城周回十七里二十五步，欲竖鹿角树，三尺立一根。问：凡几何根？曰：用四千二百五十根。术曰，城七里，以三百步乘之，纳二十五，得二千一百二十五，以六尺因之，得积尺，得一万二千七百五十尺，以三尺除之，即得根数四千二百五十根。

7. 今有棉七千二百二十六斤，欲造袍，领别用棉八斤。问：物合着棉得几领？曰：九百三领余二斤。术曰，先张棉七千二百二十六斤于上，以八斤于上除之，即得袍九百三领，余二斤。

8. 今欲造袍一千八百九十二领，凡别用紫，帛各三丈五尺。问：总紫，帛几何？曰：合用二千三百一十一匹，一千六百五十五匹二丈紫，一千六百五十五匹二丈帛。

9. 今有城周回十八里，四面有门，门有二楼；又四角，角有一大楼，一十五小楼。二十步置一弩，四十步置一方梁，六十步置一石车，五步置一钩。一大楼上着四十人，一小楼着二十人，弩

着三人，一方梁着八，石车置二十人，一钩置二人，又欲一步着战士一人。问：凡用兵几何？曰：一十二大楼用人四百八十个，小楼用人一千二百，二百七十张弩，用人八百一十，一百三十五方梁，用人一千八十人，九十个石车，用人一千八百人，一千八十枚钩，用人二千一百六十人，五千四百步，用人五千四百。术曰，先张大楼十二以四十乘之得四百八十人。次张小楼十五以四乘之得小楼六十，以二十乘之，得一千二百人。次张城十八里以三百步乘之，得积步五千四百，次以二十除之，得弩二百七十张，以三人因之得八百一十人。次更置积步五千四百，以四十步除之，得方梁一百三十五，以八因之，得一千八十人。次置积步五千四百，六十步除之得石车九十，以二十人乘之，得一千八百人。次更置积步五千四百以五步除之得钩一千八十枚，以二人乘之，得二千一百六十人。次更置积步五千四百以一人因之得一，乘步长，遂得五千四百人即是。欲得都数并之得一万二千九百三十人。

10. 今有四王各领九军出征，一军有仪同，欲使二人共驶，三驶共火，四火共帅，五帅共将，六将共一都督，七都督共一营主，八营主共一仪同。问：合得几何？曰四王，三十六仪同，二百八十八营主，二千一十六都督，一万二千九、十六将，二万四百八十帅，二十四万一千九百二十火，七十二万五千七百六十驶，一百三十五万一千五百二十人正身。术曰，先张四王以九因之，得仪同之数三十六人。次以八因之，得营主之数二百八十八人。次以七因之，得都督之数二千一十六人。次以六因之，得大将之数一万二千九十六人。次以五因之，得帅之数六万四百八十人。次以四因之，得火之数二十四万一千九百二十火。次以三因之，得驶之数七十二万五千七百六十。次以二因之，得正身数一百四十五万一千五百二十人，即得。

11. 今有木方三尺，高三尺，欲方五寸，作杭一枚。问：总得几何？曰：二百一十六枚。术曰，以方三尺乘之，得九尺，以

高三尺乘之，得廿七尺，又以八因之，即得杭数。

12. 今有蜡方三尺高三尺，欲一日燃方寸，问得几日燃？曰：得七十五年燃。术曰，方三尺自相乘，得九尺，复以高三尺乘之，得二十七尺，迁上十作寸，得二万七千寸，以三百六十日除之，即得。

13. 今有木广三尺，长三尺，高三尺，欲方三寸，作杭一枚，问：总得杭几何？曰：一千枚。术曰，广长自相乘，得九尺，复以高三尺乘之得二十七尺，迁十作寸，得二万七千寸。次方三寸自相乘，得九寸，复以高三寸乘之，得二十七寸，以二十七寸除之，即得杭数。

参 考 文 献

（按各类的发表年代先后为序）

专 著

一 通史性著作

1 Mikami Y. Development of Mathematics in China and Japan. Leipzig，1913

2 Smith D E. History of Mathematics. vol. I，Boston：Ginn & Co.，1923(多次再版)

3 李俨. 中国算学史. 上海：商务印书馆，1937(后来多次再版，并被译成日文)

4 李俨. 中国古代数学史料. 上海：中国科学图书仪器公司，1954；修订版. 上海：上海科学技术出版社，1963

5 李俨. 中国数学大纲上卷. 修订版. 北京：科学出版社，1958

6 李俨，杜石然. 中国古代数学简史(上册). 北京：中华书局，1963(被译为英文)

7 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964(后又再版，被译为日文)

8 Берёзкина Э И. Математика древнего Китая. Москва：Издательство《Наука》，1980

9 李迪. 中国数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1964

(被译为日文)

10 沈康身. 中算导论. 上海：上海教育出版社，1986

11 中外数学简史编写组. 中国数学简史. 济南：山东教育出版社，1986

12 Martzloff J C. Histoire des Mathematique Chinoiss. Paris：Masson，1988

13 Lam Lay Yong，Ang Tianse. Fleeting footsteps. Singapore：World Scientific Publishing Co Pte Ltd，1992

14 刘钝. 大哉言数. 沈阳：辽宁人民出版社，1995

15 李兆华. 中国数学史. 台北：文津出版社，1995

16 李迪. 中国数学通史(上古到五代卷). 南京：江苏教育出版社，1997

17 李迪，主编. 中华传统数学文献精选导读. 武汉：湖北教育出版社，1998

二 专题性著作

18 薮内清. 隋唐历法史の研究. 东京：三省堂. 昭和十九年(1944)

19 李俨. 中算家的内插法研究. 北京：科学出版社，1957

20 曲安京，纪志刚，王荣彬. 中国古代数理天文学探析. 西安：西北大学出版社，1994

21 陈美东. 古历新探. 沈阳：辽宁教育出版社，1995

三 人物及其著作的著作

22 Ang Tianse . A Study of the Mathematical Manual of Chang Chuchien：[M. A. dissertation]. Kuala Lumpur：University of Malaya，1969

23 李迪. 大科学家祖冲之. 上海：上海人民出版社，1959

24 李迪，祖冲之．上海：上海人民出版社，1973

25 李迪．唐代天文学家张遂(一行)．上海：上海人民出版社，1965

四 期刊及文集

26 自然科学史研究．中国科学院自然科学史研究所，中国科学技术史学会

27 数学史研究．日本数学史学会

28 Historia Mathematica. International Commission the History of Mathematics

29 科学史集刊(已停)．北京：科学出版社

30 吴文俊，主编．中国数学史论文集(一)至(四)．济南：山东教育出版社，1985～1996

31 李迪主编．数学史研究文集第一辑～第六辑．呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1990～1995

32 李俨．中算史论丛第一集～第五集．北京：科学出版社，1954～1955

33 中国科学院自然科学史研究所．钱宝琮科学史论文选集．北京：科学出版社，1983

论文及文章

一 晋南北朝

(一)综合性论文与文章

34 严敦杰．南北朝算学书志．图书季刊，1940，2(2)：196～212

35　(西北大学)数学系. 儒法斗争与魏晋南北朝时期的数学. 西北大学学报，1975(2)：1～4

(二)《孙子算经》与“孙子定理”

1.《孙子算经》

36　钱宝琮. 孙子算经考. 科学，1929，14(2)：161～169

37　李俨. 孙子算经补注. 国立北京图书馆馆刊，1930，4(4)：13～29

38　严敦杰. 孙子算经研究. 学艺，1937，16(2)：67～78

39　Берёзкина Э И. О математическом трактате Сунь-цзы. Историко～математические исследования，вып. XIII，1960. 219～230

40　Берёзкина Э И. О математическом труде Сунъ-цзы，Из истории науки и техники в странах Востока，вып. III，1963. 5～21

41　Wang Ling. The date of Sun Tzu suan Ching and the Chinese remainder problem，Proceeding of 10th International Congress of the History of Science(Ithaca,1962)1. 1964. 489～492

42　高振儒. 关于《孙子算经》编纂年代的考证. 山西大学学报(哲学社会科学版)，1982(4)(增刊)

43　纪志刚.《孙子算经序》的数学哲理. 科学技术与辩证法，1990(1)：44～47

2.“孙子定理”

44　敖文宗. 物不知总的普通算法. 科学，1931，15(9)：1399～1413

45　李文林，袁向东. 中国剩余定理，中国古代科技成就. 北京：中国青年出版社，1978. 111～121

46　沈康身：中国剩余定理的历史发展. 杭州大学学报(自然科学版)，1988(3)：270～280

47 Shen Kangshen. Historical Development of the Chinese Remainder Theorem, In: Archive for History of Exact Sciences. London: Springer-Verlag, 1988(38). 285～305

(三)《张邱建算经》及"百鸡术"等

1.《张邱建算经》

48 Ho Pengyoke. The lost Problems of the Chang Chiu-chien Soan Ching, A Fifth-Century Chinese Mathematical Manual. Oriens Extremus, 1965(12): 37～53

49 Берёзкина Э И (译). Математический трактат Чжан Цю-цзяна, Физко-математические науки в странах Востока, вып. Ⅱ (V), 1969. 27～81

50 牛亚华.《张邱建算经》的经济史料价值，内蒙古师大学报(自然科学版)，1989(1)(科学史增刊)：66～71

51 冯立升.《张邱建算经》的成书年代问题，数学史研究文集第一辑. 呼和浩特:内蒙古大学出版社，台北:九章出版社，1990. 46～49

2."百鸡术"及其他

52 钱宝琮. 百鸡术源流考. 学艺，1921，3(3)：1～6

53 李兆华.《张邱建算经》中的等比数列问题. 内蒙古师院学报(自然科学版)，1982(1)：106～113

54 李兆华.《张邱建算经》的数学成就. 中等数学，1983(3)：36～38

(四)祖冲之与圆周率研究

1. 祖冲之传

55 陈登原. 祖冲之——1500年前之中国科学家，人文，1934，5(7)：1～5

56 王愚. 中国古代数学家——祖冲之. 人物杂志(谕版)，1946(6)：33～34

57 燕羽. 我国伟大的科学家祖冲之和李时珍. 上海解放日报，1953-04-23

58 戴文赛. 我国伟大的科学家祖冲之. 北京日报 1953-04-17；中国青年报 1953-04-24

59 许纯舫. 中国伟大的科学家——祖冲之，科学大众，1953(5)：158～159

60 胡林超. 我国第五世纪的大科学家——祖冲之. 科学画报，1953(6)：167

61 李迪. 南北朝时代伟大的科学家——祖冲之. 科学研究通报(自然科学版)(东北师大)，1955(1)：211～217

62 李俨. 祖冲之. 科学大众. 1956(9)：417～419

63 李希泌. 伟大的科学家祖冲之，光明日报，1956-09-25

64 李俨. 祖冲之——杰出的中国古代数学家. 人民中国通讯，1956(20)：36～40

65 杜石然. 祖冲之. 天文爱好者，1960(3)：4

66 朱仲玉. 祖冲之. 人民日报，1961-09-10

67 郅兰. 祖冲之和他的科学成就. 复旦学报(自然科学版)，1974(2)：24～29

68 舒群，伟大的进步科学家祖冲之，数学的实践与认识，1974(4)：1～6

69 张志国，等. 祖冲之的法家思想及其在科学技术上的成就，吉林日报，1974-12-19

70 舒群. 杰出的科学家——祖冲之. 科学实验，1975(1)：13～15

71 李迪. 杰出的数学家祖冲之. 实践，1980(1)：46～47

72 无为. 祖冲之和《述异记》. 文学报，1984-05-17

73 梅荣照. 刘徽与祖冲之父子. 科学史集刊，北京：地质出版社，1984(11)：105～129

74 梁宗巨. 对祖冲之的一些误解. 数理化信息(1), 沈阳: 辽宁人民出版社, 1985. 81～89

75 杜石然. 祖冲之传. 中国传统科技文化探胜. 北京: 科学出版社, 1992. 67～81

2. 祖冲之《大明历》及其相关问题

76 (中国科技大学)物理系理论小组. 我国历法史上的一次儒法斗争——读祖冲之《驳议》篇. 中国科学技术大学学报, 1974, 4(1～2): 15～20

77 舒进. 学习中国数学史资料札记——《大明历》产生时的斗争与祖冲之的数学成就. 数学学报, 1974, 17(3): 153～155

78 褚君洗. 论天象厚古薄今, 祖冲之改革历法. 解放日报, 1974-09-24

78 北京师范大学天文系. 从祖冲之的历法改革看儒法斗争. 天文学报, 101～103; 北京师范大学学报(自然科学版), 1975(1): 47～49

80 广西大学基础部大批判组. 在历法问题上的一场儒法论战——读《驳议》. 广西大学学报, 1974(2): 21～25

81 贾力行. 从祖冲之改革历法而展开的一场论战看我国古代科学技术发展中的儒法斗争. 中学数学参考资料, 1974(14): 2～4

82 薛源, 李仑. 吉林大学学报(自然科学版), 1974(3): 1～5

83 (安徽大学)物理系理论小组. 安徽大学学报, 1974(3): 53～55

84 厦门大学数学系写作组. 祖冲之及其《历议》的革新精神. 教育革命通讯, 1974(24): 21～25; 厦门大学学报(自然科学版). 1974(1): 5～9

85 裴震. 科学家祖冲之的尊法反儒思想. 文汇报, 1974-12-

02

86 蔡克勇. 批判因循守旧，敢于革新创造——从祖冲之谈起. 华中工学院学报，1975(1)：18～21

87 清华大学力学教研组，数学教研组理论小组. 儒法两条路线的一场大辩论——读祖冲之《辨戴法兴难新历》. 物理学报，1975，24(1)：79～82

88 柳冰. 祖冲之和“驳议”. 兰州大学学报(自然科学版)，1975(3)

89 城地 茂. 祖冲之的大明历与圆周率计算. 北京师范大学学报(自然科学版)，1989(4)：85～89

90 曲安京.《大明历》的上元积年计算. 见：李迪数学史研究文集第二辑，呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社. 1991. 51～57

3. 圆周率研究

91 钱宝琮. 中国算书中之圆率研究. 科学，1923，8(2)：114～129；1923，8(3)：254～265；钱宝琮科学史论文选集. 北京：科学出版社，50～74

92 崔宏. 中国隋唐前圆周率之研究. 北强月刊，1934，1(5)：56～60

93 严敦杰. 中国数学家祖冲之及其圆周率之研究. 学艺 1936，16(5)：37～50

94 严敦杰. 隋书律历志祖冲之圆周率记事释. 学艺，1936，15(10)：27～57

95 程纶. 圆周率在中国的发展. 武汉数学通讯，1951(15)：3～4；1951(16)：2～4；1951(17)：3～5

96 余宁生. 祖国数学家在圆周率上的伟大贡献. 见：近代数学概论第四册附录. 北京：中华书局，1953. 170～174

97 钱宝琮. 圆周率$=\frac{3\ 927}{1\ 250}$的作者是谁?它是怎样得来的?数学通报，1955(5)：4～5

98 孙炽甫. 中国古代数学家关于圆周率研究的成就. 数学通报，1955(5)：5～12

99 李迪. $\pi\doteq\frac{3\ 927}{1\ 250}$的作者和祖冲之的圆周率算法. 数学通报，1955(11)：20～22

100 萧而广. 关于圆周率$\frac{3\ 927}{1\ 250}$作者问题的一点意见. 自然科学学报(东北人民大学)，1955(1)：365～366

101 Lam Lay Yong , Ang Tianse. Circle Measurement in Ancient China. Historia Mathematica，1986，13：325～340

102 梁宗巨. 祖冲之密率的优越性. 辽宁师范大学学报，1986年增刊"数学史专辑"：5～12

103 Zha Yowlian(查有梁). Research on Tsu Chung-Chihs (祖冲之)Approximate Method for π. In：Science and Technology in Chinese Civilization. Singapore：World Scientific. 1987. 77～86

104 李强. 祖冲之圆周率产生的历史条件. 中国历史博物馆馆刊，1987(10)：47～52

105 陈良佐. 九章算术圆田术祖冲之注. 汉学研究，1987，5(1)：193～228

106 胡炳生. 关于祖冲之"盈朒"二数算法的研究. 见：李迪数学史研究文集第五辑，呼和浩特：内蒙古大学出版社、台北：九章出版社. 1993. 26～31

107 Volko V A. Calculation π of in Ancient China：from Liu Hui to Zu Chongzi. Historia Scientiarum，1994，4(2)：139～157

108 Volkov A. Supplementary Date on the Values of π in History of Chinese Mathematics. Philosophy and the History of Science, 1994, 3(2): 95～110

4. 缀术与缀术求π

109 李赞和. 缀术索隐. 数学通讯, 1958(85): 13～16

110 李迪. 缀术的失传时代问题. 数学通讯, 1958(91): 33～34

111 王守义. 祖冲之氏缀术求π的我见. 甘肃师范大学学报(自然科学版), 1962(2): 46～61

112 查有梁. 缀术求π新解. 大自然探索, 1986(4): 133～140

5. 祖暅之与"祖暅之原理"

113 严敦杰. 祖暅别传. 科学, 1941, 25(7～8): 460～467

114 刘操南. 释球积术. 图书展望(科学专号), 1948(9)(复刊): 9～10

115 刘操南. 梁祖暅之伟大科学成就——球积术. 文史哲, 1952(6): 24～30

116 杜石然. 祖暅之公理, 数学通报, 1954(3): 9～11

117 钱宝琮. 关于祖暅和他的缀术. 数学通报, 1954(3): 12

118 陆慧英. 祖暅原理的应用. 数学教学, 1956(2): 5

119 魏诗其. 祖暅原理及其应用. 上海师范学院学报, 1959(2): 71～90

120 赖观模. 谈祖暅原理. 数学教学月刊, 1960(4): 27

121 李迪. 南北朝时代卓越科学家祖暅. 内蒙古教育, 1978(2): 47～48

122 Wagner D B. Liu Hui and Tsu Kengchih on the Volum of a Sphere. Chinese Science, 1978(3): 59～79

123 刘操南. 祖冲之, 祖暅父子球积术释义. 见: 文史新探.

上海：上海社会科学院出版社，1982；古籍与科学(《北方论丛》丛书)，1990. 254～273

124 罗见今. 关于刘、祖原理的对话. 刘徽研究，西安：陕西人民教育出版社，1993. 219～243

(五)何承天"调日法"与其他算书

1. 何承天"调日法"

125 陈久金. 调日法研究. 自然科学史研究，1984，3(3)：245～250

126 李继闵. 关于"调日法"的数学原理. 西北大学学报(自然科学版)，1985(2)：5～21

127 李继闵. "调日法"源流考. 第三届国际中国科学史讨论会论文集，北京：中国科学技术出版社，1990. 31～43

128 王渝生. "何承天调日法"辨，科史薪传. 沈阳：辽宁教育出版社，1997. 235～256

2. 《夏侯阳算经》

129 H'ee L van. The Arithmetic Classic of Hisa-Hou Yang. The American Mathematical Monthly，1924(31)：235～237

130 钱宝琮. 夏侯阳算经考. 科学，1929，14(3)：311～320

3. 《五曹算经》

131 冯礼贵. 甄鸾及其《五曹算经》. 见：中国数学史论文集(三)，济南：山东教育出版社，1986. 29～38

4. 《五经算经》

132 魏保华. 对《五经算术》的初步研究. 见：李迪数学史研究文集第三辑，呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1992. 49～57

二　隋唐五代

(一)综合研究

1. 研究进展

133　李迪，冯立升. 90年代隋唐五代数学史的新进展. 常熟高专学报(自然科学版)，1996(1)：10～15

2. 通论

134　李俨. 唐宋元明数学制度. 科学，1933，17(10)：1545～1565；中算史论丛第四集，北京：科学出版社，1955. 238～280

135　孔国平. 隋唐数学教育制度，科史薪传. 沈阳：辽宁教育出版社，1997. 131～139

136　李俨. 唐代算学史. 西北史地，1938，1(1)：63～95；中算史论丛第五集，北京：科学出版社，1955. 15～56

3. 中印关系

137　李俨. 印度历算与中国历算之关系. 学艺，1934，13(9)：57～74；1934，13(10)：51～64；中算史论丛(四)，上海：商务印书馆，1937. 371～418

138　Gupta R C. Indian Astronomy in China During Ancient Times，Vishveshvaranand Indolagical Journal，1981(XIX)：266～276

139　Gupta R C. Sin-Indian introduction and the Great Chinese Buddhist Astronomy-Mathematician I-Hsing (A. D. 683～727). Ganita Bharati，1989，11(1～4)：38～49

4. 隋唐历算综论

140　钱宝琮. 招差术. 上海大公报，1951-03-26

141　严敦杰. 中算家的招差术. 数学通报，1955(1)：4～13

142　Li Yen. The Interpolation Formulae of Early Chinese Mathematicians. actes du Ⅷ^{e} congrès international d'histoire des

sciences, 1956. 70～72

143 严敦杰. 中国古代的黄赤道差计算法. 科学史集刊, 北京: 科学出版社, 1958(1): 47～58

144 Ang Tianse. The Use of Interpolation Technique in China Calender. Oriens Extremus, 1976, 23(2): 135～151

145 王荣彬. 中国古代历法中的插值法构建原理. 见: 中国古代数理天文学探析, 西安: 西北大学出版社, 1994. 249～318

146 纪志刚. 隋唐历法的创造性转变. 见: 中国古代数理天文学探析, 西安: 西北大学出版社, 1994. 249～318,

147 曲安京. 中国古历若干典型算例的数理分析. 见: 中国古代数理天文学探析, 西安: 西北大学出版社, 1994. 249～318, 183～247

148 大桥由纪夫. 隋唐时代の间补法の算术的起源. 科学史研究, 1994, 33(2): 15～24

5. 唐代记数法

149 钱宝琮. 唐代历家奇零分数记法之演进. 数学杂志, 1936, 1(1): 65～76; 钱宝琮科学史论文选集, 北京: 科学出版社, 1983, 261～270

150 李俨. 唐代大写数字. 陕西文化, 1943, 1(2): 16～20

(二)隋刘焯《皇极历》

151 王荣彬. 刘焯《皇极历》插值法的构建原理. 自然科学史研究, 1994, 13(4): 293～304

152 刘钝. 《皇极历》中等间距二次内插方法术文释义及其物理义意. 同上, 305～315

153 纪志刚. 皇极历定朔算法及其数理分析. 数学史研究文集第六辑, 1995(1998 年印出): 33～42

(三)王孝通及其《缉古算经》

1. 王孝通

154 梅荣照. 隋唐时代的数学家王孝通. 科学报，1961－08－08

2.《缉古算经》

155 沈康身. 王孝通开河筑堤题分析. 杭州大学学报(自然科学版). 1964，1(4)：43～58

156 沈康身. 拟柱体积与中国堤积公式. 数学通报，1964(9)：25～27

157 钱宝琮. 王孝通《缉古算经》第二题、第三题术文疏证. 科学史集刊，1966(9)：31～52；钱宝琮科学史论文选集，北京：科学出版社，1983，495～529

158 白尚恕. 王孝通《缉古算经》校证，见：科技史文集第8辑“数学史专辑”，上海：上海科学技术出版社，1982. 88～105

159 何绍庚.《缉古算经》勾股题佚文试补. 中国历史博物馆馆刊，1989(12)：37～43

160 王荣彬. 王孝通《缉古算经》自注佚文校补. 见：李迪数学史研究文集第一辑，呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1990. 50～55

161 刘操南.《缉古算经》叙录. 见：古籍与科学(《北方论丛》丛书). 1990. 274～284

162 郭世荣.《缉古算经》造仰观台题新解. 自然科学史研究，1994，13(2)：106～113

(四)李淳风及其历算

1. 李淳风

163 天津西康路中学理论研究小组. 李淳风，天津日报1975年4月10日

164 曹昭砻. 唐代天文数学家李淳风的科学成就，厦门大学学报(自然科学版)，1979(4)：118～125

2. 注释“十部算经”

165 张惠民. 唐代《算经十书》编辑注释及其历史作用. 陕西师大学报(自然科学版), 1987(2): 88～94

166 傅大为. 论《周髀》研究传统的历史发展与转折. (新竹) 清华学报, 1988(1): 1～41

167 曲安京. 李淳风等人盖天说日高公式修正案研究. 自然科学史研究, 1993, 12(1): 42～51

168 刘钝. 关于李淳风斜面重差术的几个问题. 自然科学史研究, 1993, 12(2): 201～211

169 Li Kowei(李国伟). From One Gnomon to Gnomons: A Methodological Study of the Method of Double Differences. In: Philosophy and Conceptual History of Science in Taiwan, Kluwer Academic Publishers, 1993. 149～166

170 郭世荣. 略论李淳风等对《九章算术》及其刘徽注的注. 见: 刘徽研究, 西安: 陕西人民出版社, 1993. 364～375

3. 李淳风的《麟德历》

171 刘金沂, 赵澄秋. 麟德历定朔计算法. 见: 中国天文学史文集第三集, 北京: 科学出版社, 1984. 38～88

172 刘金沂. 麟德历交食计算法. 自然科学史研究, 1984, 3(3): 251～260

173 刘金沂. 麟德历行星运动计算法. 自然科学史研究, 1985, 4(2): 144～159

174 纪志刚. 麟德历晷影计算方法研究. 自然科学史研究, 1994, 13(4): 316～325

(五)一行(张遂)

1. 一行(张遂)传

175 春日礼智. 一行传の研究. 东洋史研究, 1941, 7(1): 31～41

176 长部和雄. 一行禅师の研究. 密教研究, 1944(87): 1

～45

177 天行. 唐代天文学家一行法师. 现代佛学，1955(3)：27～28

178 林端炤. 唐代卓越的天文学家——僧一行. 光明日报，1956-01-16；新华半月刊，1956(7)：159～160

179 席泽宗. 唐代伟大的天文学家——一行. 中国新闻，1957-06-06

180 薄树人. 一行. 科学报，1959-09-05

181 李德诚. 一行和他的《大衍历》. 吉林日报，1959-11-19

182 薄树人. 唐代卓越的天文学家——僧一行. 天文爱好者，1964(10)：9～10

183 金天基. 张遂. 天津日报，1974-12-27

184 厦门大学自然观研究组第四小组. 张遂的天文历法成就及其自然观. 厦门大学学报(自然科学版)，1976(2)：92～95

185 Ang Tianse. I-Hsing(683～727A. D.)：His life and Scientific work：[Ph. D. dissertation]，Kuala Lumpur：University of Malaya，1979

186 严敦杰. 一行禅师年谱，自然科学史研究，1984，3(1)：35～42

187 Ang Tianse. The Astronomical System of Yixing (683－727A. D)・香港大学中文系集刊 1987，1 (2)，中国科技史专号，1～12

188 Ang Tianse. A Biography of Yixing (683～727A. D.)，学术研究第三辑，1989. 31～76

2.《大衍历》

189 宫岛一彦. 大衍历の五星计算法. 见：京都大学人文科学研究所. 中国古代科学史论. 1989. 337～362

190 胡铁珠. 大衍历与苏利亚历的五星运动计算. 自然科学

史研究，1990，9(3)：219～231

3. 天文大地测量

191 竺可桢. 中国的世界第一——子午线的测量. 上海大公报，1951－04－07

192 杨志玖. 一行发起测量子午线长度的问题. 科学通报，1956(4)：94～95

193 梁宗巨. 僧一行发起的子午线实测. 科学史集刊，1959(2)：144～149

194 Beer A，et al. An 8th Century Meridina Line：I-Hsing's Chain of Gnomons and etc. Vistas in Astronomy，1961，4：3～28

195 王冠倬. 从一行测量北极高看唐代的大小尺. 文物. 1964(6)：24～29

196 Needham J，Beer A，Ho Pingyü，et al. An Eighth-Century Meridian Line：I-Hsing's Chain of Gnomong and the Prehistory of the Metric System. Vistas in Astronomy，1964

197 陕西天文台天文史整理研究小组. 我国历史上第一次天文大地测量及其意义——关于张遂(僧一行)的子午线测量. 天文学报，1976，17(2)：209～215

198 陕西天文台"祖国天文学"整理研究小组. 我国古代第一次子午线测量. 科学实验，1978(1)：30～32

4. 晷差表

199 Cullen C. An Eighth Century Chinese Table of Tangents. Chinese Science，1982，5：1～33

200 刘金沂，赵澄秋. 唐代一行编成世界上最早的正弦函数表. 自然科学史研究，1986，5(4)：298～309

201 曲安京.《大衍历》晷影差分表的重构. 自然科学史研究，1997，16(3)：233～244

(六)唐代中后期的经济数学实例及历算

1. 经济数学实例

202 阿思奇. 唐代经济数学实例考. 经济研究, 1985(2): 66～67

203 席振伟. 刘晏经济工作中的数学思想研究. 自然科学史研究, 1995, 14(2): 132～139

2. 曹士芳与《符天历》

204 桃裕行. 「符天历と宿曜道」史料, 日本历史地理学会例会报告. 1964年2月29日.

205 桃裕行. 符天历につとこ, 科学史研究, 1964(71): 118～119

206 中山茂. 符天历の天文学的位置. 科学史研究 1964(71): 120～123

207 周济. 曹士芳及其符天历. 历史学创刊号. 1979

208 薮内 清. 唐曹士芳の符天历につとこ, ビ"フ"リア, 1982(78): 2～18. 中译文见: 科学史译丛, 1983(1): 83～93

209 陈久金. 符天历研究. 自然科学史研究, 1986. 5(1): 34～40; 陈久金集, 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1993. 375～385

3. 边冈

210 陈美东. 边冈历算捷法试析. 见: 中国科学技术史国际学术讨论会论文集. 北京: 中国科学技术出版社, 1992. 11～15

(七)敦煌算书与五代历算

1. 敦煌算书

211 李俨. 敦煌石室算书. 中大季刊, 1926, 1(2): 1～4; 中算史论丛(一), 上海: 商务印书馆, 1931

212 李俨. 敦煌石室算经一卷并序. 国立北京图书馆馆刊, 1935, 9(1): 39～46

213 李俨. 敦煌石室"立成算经". 图书季刊, 1939, 1(4):

386～396

214 Libbrecht U J. Mathematical Manuscripts from the Tunhuang Caves. In：Explorations in the History of Science and Technology in China. Shanghai：Shanghai Chinese Classics Publishing House，1982. 203～230

215 许康.敦煌算书透露的科学与社会信息.敦煌研究，1989(1)：96～103

216 王进玉. 敦煌遗书中的数学史料及其研究. 见：李迪. 数学史研究文集第二辑，呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1991. 58～65

2. 五代历算

217 李迪，冯立升.《谢察微算经》试探. 见：李迪. 数学史研究文集第三辑，呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1992. 58～65

218 李迪. 五代数学刍议. 见：李迪. 数学史研究文集第六辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社，台北：九章出版社，1995(1998年印出). 43～48

作者按：本卷的“分类文献目录”中的“论文与文章”部分内，与天文历法直接相关的有63条，超过总条数185的三分之一，说明本时期中国数学的特点，即天文历法研究中应用了大量数学知识，有些是具有创造性的，在数学发展中起过重要作用。

（李迪执笔）